

Correction exercices Chapitre M1

* Exercice 1: (4)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2a_0 t \\ \dot{y}(t) = -v \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases} \quad \vec{v}(t) = 2a_0 t \vec{e}_x - v \vec{e}_y$$

(1)

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 2a_0 \\ \ddot{y}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \quad \vec{a}(t) = 2a_0 \vec{e}_x$$

(1)

$$\textcircled{2} \text{ à } t = 2 \text{ s} : v(t) = \sqrt{(2a_0 \times 2)^2 - v^2} = 8,5 \text{ m/s} \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{3} \text{ à } t = 1 \text{ s} \quad a(t) = 2a_0 = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad \textcircled{1}$$

* Exercice 2 :

① La trajectoire est selon la droite $y = 2c$: mouvement rectiligne // (Ox)

$$\text{Comme } \begin{cases} \ddot{x} = 2a = \omega^2 c \\ \ddot{y} = 0 \end{cases} \quad \vec{a} = \omega^2 c \vec{e}_x : \text{mvt rectiligne uniformément accéléré}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ OM} &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2(\omega t) + a^2 \sin^2(\omega t)} \\ &= a \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = a = \omega c : \text{distance au centre toujours égale} \end{aligned}$$

→ trajectoire circulaire

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{a^2 \omega^2 (\cos^2 + \sin^2)} = a\omega = \omega c$$

⇒ mvt circulaire uniforme

* Exercice 3 (4)

On considère un mouvement rectiligne et on prend $t = 0$ le début du freinage

$$a_x = -a_0 = -4,2 \text{ m/s}^2$$

$$v_x = \int a_x \cdot dt = -a_0 t + cste$$

$$\bullet \text{ A } t = t_0 = 0 \quad v_x(0) = 90 \text{ km/h} = \frac{90}{3,6} \text{ m/s} = 25 \text{ m/s} = v_0$$

$$v_x(0) = v_0 = -a_0 \times 0 + cste$$

$$v_0 = cste$$

$$\Rightarrow v_x = -a_0 t + v_0 \quad (1)$$

= 0 on prend l'origine à $t = 0$

$$x = \int v_x \cdot dt = -\frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + cste \quad (1)$$

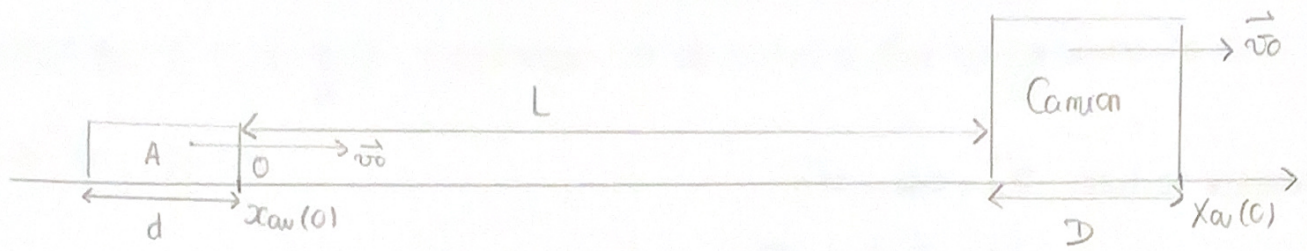
* La voiture s'arrête quand $v_x = 0 = -a t_f + v_0$

$$\Leftrightarrow t_f = \frac{v_0}{a} = \frac{25}{4,2} = \underline{6,0 \text{ s} = t_f} \quad (1)$$

* La distance parcourue vaut:

$$x = -\frac{1}{2} a t_f^2 + v_0 t_f = -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a} + \frac{v_0^2}{a} = \frac{v_0^2}{2a} = \underline{74 \text{ m} = d} \quad (1)$$

* Exercice 4



① Pour la voiture: $\ddot{x} = +a$
 $\dot{x} = +at + v_0$
 $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + 0$

Pour le camion: $\ddot{X} = 0$
 $\dot{X} = v_0$
 $X = v_0t + L + D$

Arrière voiture.

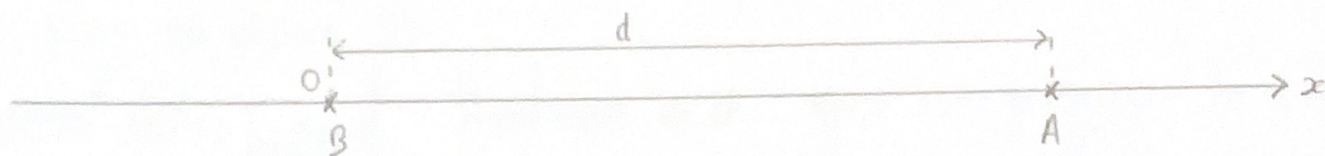
② On cherche t_1 tel que $(x - d) - X = 20\text{m} = \ell$.
 $\Leftrightarrow x - X = \ell + d$

$$\frac{1}{2}at^2 + \cancel{v_0t} - \cancel{v_0t} + L + D = \ell + d$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a \cdot t^2 = \ell + d - L - D$$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2(\ell + d - L - D)}{a}} = 6.8\text{s}$$

* Exercice 5



① Première voiture: $\ddot{x}_A = \text{cte} = \ddot{x}_A$

$$\dot{x}_A = \ddot{x}_A t + v_0$$

$$x_A = \ddot{x}_A \frac{t^2}{2} + v_0 t + d$$

Deuxième voiture: $\ddot{x}_B = \text{cte} = \ddot{x}_B$

$$\dot{x}_B = \ddot{x}_B t + \text{cte}$$

2,0 sec

$$\dot{x}_B(t_B) = v_0 = \ddot{x}_B t_B + \text{cte}$$

$$\text{cte} = v_0 - \ddot{x}_B t_B$$

$$\rightarrow \dot{x}_B = \ddot{x}_B (t - t_B) + v_0$$

$$x_B = \frac{1}{2} \ddot{x}_B (t - t_B)^2 + v_0 t + \text{cte}$$

$$x_B(t_B) = v_0 t_B = v_0 t_B + \text{cte}$$

$$x_B = \frac{1}{2} \ddot{x}_B (t - t_B)^2 + v_0 t$$

Ces équations ne sont valables que pendant le freinage.

pour $t < t_A = -\frac{v_0}{\ddot{x}_A} = 15 \text{ s}$ pour la 1^{ère}

$t < t_B = t_B - \frac{v_0}{\ddot{x}_B} = 32 \text{ s}$ pour la 2nd

② On cherche t_c tel que $x_A = x_B$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}_A \frac{t_c^2}{2} + v_0 t_c + d = \frac{1}{2} \ddot{x}_B (t_c - t_B)^2 + v_0 t_c$$

$$\Leftrightarrow (\ddot{x}_A - \ddot{x}_B) t_c^2 + (2v_0 - 2\ddot{x}_B t_B) t_c + 2d - \ddot{x}_B t_B^2 = 0$$

$$(\ddot{x}_A - \ddot{x}_B) t_c^2 + (2\ddot{x}_B t_B) t_c + 2d - \ddot{x}_B t_B^2 = 0$$

On trouve $t_c = 11 \text{ s}$ (dans le domaine)

$$\text{et } x_A(t_c) = x_B(t_c) = \frac{1}{2} \ddot{x}_A t_c^2 + v_0 t_c + d = 300 \text{ m}$$

* Exercice 6

① $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

Comme $\cos \in [-1; 1]$ l'anneau va de $-X_m$ à X_m et parcourt 20 cm

$\hookrightarrow X_m = 10 \text{ cm}$

② La période correspond au plus petit T pour lequel $x(t+T) = x(t)$
Le cosinus reprend la même valeur tout les 2π

$$\Rightarrow \cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi + 2\pi) \\ = \cos(\omega(t+T) + \varphi)$$

On a donc $\omega(\cancel{t} + T) + \cancel{\varphi} = \omega\cancel{t} + \cancel{\varphi} + 2\pi$
 $\omega T = 2\pi$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 13 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

③ A $t = 0$: $x(0) = 5,0 = X_m \cos(\varphi)$

$$\Leftrightarrow \cos(\varphi) = \frac{5,0}{X_m} = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

A $t = 1,5 \text{ s}$: $x = X_m \cos(1,5\omega + \varphi)$
 $= 5,0 \text{ cm}$

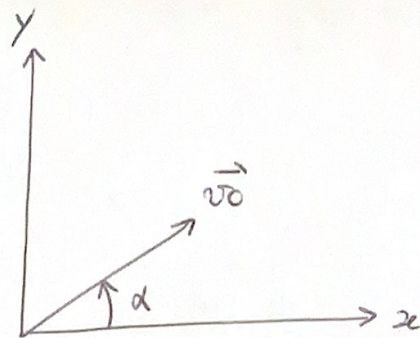
④ $\dot{x} = -\omega_0 X_m \sin(\omega t + \varphi)$

qui vaut au maximum $\dot{x}_{\max} = -\omega_0 X_m = 1,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

⑤ $\ddot{x} = -\omega_0^2 X_m \cos(\omega t + \varphi)$
 $= -\omega_0^2 x$: équation différentiel oscillateur harmonique.

* Exercice 7

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad a_x = \ddot{x} &= 0 & \dot{x} &= v_0 \cos \alpha \\ a_y = \ddot{y} &= -a & \Rightarrow \dot{y} &= -at + v_0 \sin \alpha \\ a_z = \ddot{z} &= 0 & \dot{z} &= v_0 \sin \alpha \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{à } t=0 : \dot{z} &= 0 & \dot{z} &= 0 \\ \dot{y} &= v_0 \sin(\alpha) & \Rightarrow \dot{y} &= -a \cdot t + v_0 \sin(\alpha) \\ \dot{x} &= v_0 \cos(\alpha) & \dot{x} &= v_0 \cos(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cdot t \cdot \cos(\alpha) & (1) \\ y &= -\frac{1}{2} a t^2 + v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha) & (2) \\ z &= 0 \end{aligned}$$

② Pour avoir les équations cartésiennes il faut éliminer t au dessus.

$$^{(1)} t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

$$^{(2)} y = -\frac{1}{2} a \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} + x \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} : \text{parabole.}$$

③ On cherche v_0 pour avoir $y(D) = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} a \cdot \frac{D^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} + \cancel{D} \tan(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 \cdot \tan(\alpha) = \frac{1}{2} a \cdot \frac{D}{\cos^2(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{1}{2} a \cdot \frac{D}{\cos^2(\alpha) \cdot \tan(\alpha)}}$$

Pour $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ on a $\cos^2(\alpha) \tan(\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{aD}$