Correction exercices M2.1 - Lois Newton :

* Exercice 1. (9)

(1) Système {balle}

Référentiel : Terrestre (Galiléen) (1)

Bilan des forces : $\vec{P} = -mg\,\vec{u_z}$

PFD $\quad m\,\vec{a} = \vec{P}$

Selon $\vec{u_z}$: $\quad m\,a_z = -mg$

$\Leftrightarrow \boxed{a_z = -g = \text{cste}}$; l'accélération est constante. (1)

(2) On intègre :

$$v_z = \int a_z\,dt = -g \cdot t + \text{cste}_z$$

$$v_x = \int a_x\,dt = 0 + \text{cste}_x.$$ (1)

A $t = 0$: $\vec{v} = v_0\,\vec{u_x}$

$v_z(0) = 0 = \text{cste}_z$

$v_x(0) = v_0 = \text{cste}_x$ (1) $\Bigg\}$ $\boxed{\vec{v}(t) = -gt\,\vec{u_z} + v_0\,\vec{u_x}}$

De norme $\boxed{v(t) = \sqrt{(gt)^2 + a^2}}$ (1)

(3) On intègre :

$x = v_0 t + \text{cste}$

$z = -\frac{1}{2} g t^2 + \text{cste}$ (1)

A l'instant initial : $x_0 = 0$; $z_0 = h$

$\Rightarrow x(0) = 0 = \text{cste}$

$z(0) = \text{cste} = h$ $\Bigg\}$ $x(t) = v_0 t$ (1)

$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h$

(1)

Elle tombe quand $z = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} g t^2 + h = 0 \Leftrightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}} = 0{,}71\,s$

④ On calcul $\boxed{x\left(\sqrt{2h/g}\right) = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} = 39.2 \text{ m}}$ ①

★ Exercice 2 :

① En chute libre on a : $a = -g = \ddot{z}$. Aucun mvmt sur x et y ici

$\Rightarrow \dot{z} = +gt + \dot{z}_0$

$= +gt$

$\Rightarrow z = +\frac{1}{2}gt^2 + \text{cste}$

On cherche à exprimer v en fonction de z

$v^2 = g^2 t^2 = 2g \cdot \frac{1}{2}gt^2$

$= 2g \cdot z$.

Ainsi $v'^2 = 2g(z+\ell)$

$= 2gz + 2g\ell$

$v'^2 = v^2 + 2g\ell \Rightarrow$ $\boxed{v' = \sqrt{v^2 + 2g\ell} = 6.4 \text{ m/s}}$

② Comme $v = gt$

$v' = gt'$

Ainsi $T = t' - t$

$\boxed{T = (v' - v)/g = 0.14 \text{ s}}$

* Exercice 3 : (5)

(1) La force de rappel vaut $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u_x}$ (1)

Or ici $l = l_0 + x$

$\hookrightarrow \vec{T} = -k(l_0 + x - l_0)\vec{u_x}$

$$\boxed{\vec{T} = -kx\vec{u_x}}$$ (1)

(2) Il y a deux ressort 1 et 2 avec $d = l_{0,1} + l_{0,2}$

$\vec{T_1} = -k(l_1 - l_{0,1})\vec{u_x}$ (1)

$\vec{T_2} = +k(l_2 - l_{0,2})\vec{u_x}$ (⚠ Oriente dans autre sens)

Avec $\begin{cases} l_1 = x \\ l_2 = d - x \end{cases}$ (1)

$\Rightarrow \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{T} = -k(x - l_{0,1})\vec{u_x} + k(d - x - l_{0,2})$

$= k(d - 2x - l_{0,1} - l_{0,2})$

$$\boxed{\vec{T} = -k2x}$$ (1)

* Exercice 4 :

• Projection : $\vec{F_1} = -F_1\cos(\alpha)\vec{e_y} - F_1\sin(\alpha)\vec{e_x}$ (1)

$\vec{F_2} = F_2\cos(\beta)\vec{e_x} - F_2\sin(\beta)\vec{e_y}$ (1)

$\vec{F_3} = F_3\cos(\gamma)\vec{e_x} + F_3\sin(\gamma)\vec{e_y}$ (1)

* Exercice 5 :

① Système : {fusée}

Référentiel : Terrestre (Galiléen)

Bilan des forces : $\vec{P} = -mg\vec{u_z}$

PFD : $m\vec{a} = -mg\vec{u_z} \iff \vec{a} = -g\vec{u_z}$

En projetant : $\begin{cases} \ddot{z} = -g \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{x} = 0 \end{cases}$

En intégrant avec $\dot{z} = V_0 \sin(\alpha)$; $\dot{y} = 0$; $\dot{x} = V_0 \cos(\alpha)$

$\begin{cases} \dot{z} = -gt + V_0 \sin(\alpha) \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{x} = V_0 \cos(\alpha) \end{cases}$

En intégrant avec $x = 0$; $z = 0$; $y = 0$

$\begin{cases} z = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin(\alpha) t \\ y = 0 \\ x = V_0 . t . \cos(\alpha) \end{cases}$

=> mouvement dans plan $y = 0$ soit (Oxz)

On a donc $t = x / V_0 . \cos(\alpha)$

Soit $z = -\frac{g x^2}{2V_0^2 \cos^2(\alpha)} + \frac{V_0 \sin(\alpha) . x}{V_0 \cos(\alpha)}$

$$\boxed{z = -\frac{g x^2}{2V_0^2 \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha) x}$$

② • Pour la portée : on cherche x_p tel que $z = 0$

$$0 = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2(\alpha)} \cdot x_p^{\cancel{2}} + \tan(\alpha)\cancel{x_p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_p = \frac{2V_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)\tan(\alpha)}{g}}$$

• On a la hauteur maximale quand z est maximale soit $dz/dx = 0$ ou $\dot{z} = 0$

$$\dot{z} = -g t_1 + V_0\sin(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{V_0}{g}\sin(\alpha)$$

puis $z(t_1) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{V_0}{g}\sin(\alpha)\right)^2 + V_0\sin(\alpha) \cdot \frac{V_0}{g}\sin(\alpha)$

$$= -\frac{1}{2g} \cdot V_0^2\sin^2(\alpha) + \frac{1}{g}V_0^2 \cdot \sin^2(\alpha)$$

$$\boxed{z_f = \frac{1}{2g}V_0^2\sin^2(\alpha)}$$

③ Application numeriQ avec $v_0 = 10^3\ m\ s^{-1}$, il faut trouver la valeur de α qui maximise x_p.

$2\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \sin(2\alpha)$

$$x_p = \frac{2V_0^2}{g} \cdot \cos^2(\alpha)\tan(\alpha) = \frac{2V_0^2}{g} \cdot \cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{V_0^2}{g}\sin(2\alpha)$$

maximal par $2\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \pi/4 = 45°$

$$\boxed{x_p = \frac{V_0^2}{g} = 100\ km}$$

$$z_f = \frac{1}{2g}V_0^2\sin^2(\pi/4) = \frac{V_0^2}{4g} = \boxed{25\ km = z_f}$$

④ Soit un point $A(x_A ; z_A)$

il faut que x_A et z_A vérifient :

$$z_A = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2(\alpha)} \cdot x_A^2 + \tan(\alpha)\, x_A$$

On utilise que $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$

$$z_A = -\tan^2(\alpha) \cdot \frac{g}{2V_0^2} x_A^2 + \tan(\alpha)\, x_A - \frac{g}{2V_0^2} x_A$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{g x_A^2}{2V_0^2} \cdot \tan^2(\alpha) - x_A \cdot \tan(\alpha) + z_A + \frac{g}{2V_0^2} x_A = 0}$$

L• On peut regarder l'équation du second degré en $\tan(\alpha)$

⑤ On calcul :

$$\tan^2(\alpha) - 2{,}8 \tan(\alpha) + 1{,}8 = 0$$

On obtient $\tan(\alpha_1) = 0{,}96 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 = 44°}$

$\tan(\alpha_2) = 1{,}8 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_2 = 61°}$

* Exercice 6 :

① a)- Systeme {ballon}

Referentiel : Terrestre (galilien)

Bilan forces : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$

PFD : $m\vec{a} = -mg\vec{u_z}$

On projette : $\ddot{y} = -g$

$\ddot{z} = 0$

$\ddot{x} = 0$

On integre avec $\dot{y}_0 = V_0 \sin(\alpha)$; $\dot{x}_0 = V_0 \cos(\alpha)$; $\dot{z}_0 = 0$

$\dot{y} = -gt + V_0 \sin(\alpha)$

$\dot{z} = 0$

$\dot{x} = V_0 \cos(\alpha)$

On integra avec $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $z_0 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin(\alpha)\, t \\ z &= 0 \\ x &= V_0 \cos(\alpha)\, t \end{aligned}}$$

Trajectoire : on a $t = x / V_0 \cos(\alpha)$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2} \frac{g}{V_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + V_0 \tan(\alpha) \cdot x}$$

b)- Le ballon passe au dessus du mur si $y(x_m = 9{,}15\text{ m}) > y_m = 1{,}90\text{ m}$

On calcule : $y(9{,}15) = 2{,}17\text{ m} > 1{,}90\text{m}$

↳ Le ballon passe au dessus du mur

c)- Le tir est cadré si $y(x_{but}) \in [0; 2.44m]$

On calcul $y(20m) = 1.73m \in [0; 2,44m]$

↳ Le tir est cadré

② a)- On refait comme en ① en ajoutant $\vec{f} = -h\dot{x}\vec{u_x} - h\dot{y}\vec{u_y}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{y} = -g - \frac{h}{m}\dot{y} \\ \ddot{x} = -\frac{h}{m}\dot{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{y} + \frac{h}{m}\dot{y} = -g \\ \ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{Y} + \frac{1}{\tau} \cdot Y = -g \\ \dot{X} + \frac{1}{\tau} X = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \begin{matrix} Y = \dot{y} \\ X = \dot{x} \end{matrix}$$

On resout :

$$\begin{cases} Y = Ae^{-t/\tau} - \tau g \\ X = Be^{-t/\tau} \end{cases}$$

Au conditions initiales : $Y = \dot{y}_0 = V_0 \sin(\alpha)$
$X = \dot{x}_0 = V_0 \cos(\alpha)$

$Y(t=0) = A - \tau g = V_0 \sin(\alpha) \Leftrightarrow A = V_0 \sin(\alpha) + \tau g$

$X(t=0) = B = V_0 \cos(\alpha)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = (V_0 \sin(\alpha) + \tau g)e^{-t/\tau} + \tau g \\ \dot{x} = V_0 \cos(\alpha)\, e^{-t/\tau} \end{cases}$$

On integre avec $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$

$$\begin{cases} y(t) = (V_0 \cdot \sin(\alpha) + \tau g)(-\tau)e^{-t/\tau} - \tau g \cdot t + C \\ x(t) = V_0 \cdot \cos(\alpha)(-\tau)\, e^{-t/\tau} + D \end{cases}$$

- $y(0) = 0 = -V_0\tau\sin(\alpha) - \tau^2 g + C \iff C = V_0\tau\sin(\alpha) + \tau^2 g$
- $x(0) = -V_0\tau\cos(\alpha) + D \iff D = V_0\tau\cos(\alpha)$

Finalement

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= (V_0\tau\sin(\alpha) + \tau^2 g)(1 - e^{-t/\tau}) - \tau g\, t \\ x(t) &= V_0\tau\cos(\alpha)(1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned}}$$

b) On calcule : $\dfrac{x}{V_0\tau\cos(\alpha)} = 1 - e^{-t/\tau} \iff t = -\tau \ln\left(1 - \dfrac{x}{V_0\tau\cos(\alpha)}\right)$

Puis $y(x) = (V_0\tau\sin(\alpha) + \tau^2 g)\left(1 - \left(1 - \dfrac{x}{V_0\tau\cos(\alpha)}\right)\right) + \tau^2 g \ln\left(1 - \dfrac{x}{V_0\tau\cos(\alpha)}\right)$

$$\boxed{y(x) = \left(x\cdot\tan(\alpha) + \frac{\tau g}{V_0\cos(\alpha)}\, x\right) + \tau^2 g \ln\left(1 - \frac{x}{V_0\tau\cos(\alpha)}\right)}$$

c) - On calcule $y(9{,}15) = 2{,}17\,m > 1{,}90\,m$

↳ au dessus du mur

d) - On calcul $y(20) = 1{,}73\,m \in [0 ; 2{,}44]$

↳ Tir cadré

Note : on a les mêmes valeurs : peu d'impact des frottements

* Exercice 7 :

(1) Systeme : {Capitaine} (1)

Referentiel : Lunaire (Galilien)

Bilan forces $\vec{P} = -m g_L . \vec{u_z}$

PFD : $m\vec{a} = -m g_L \vec{u_z}$

On projette : $\ddot{z} = -g_L$ (1)

$\ddot{y} = 0$

$\ddot{x} = 0$

On integre avec $\dot{y}_0 = 0$: $\dot{x}_0 = v_0 \cos(\alpha)$; $\dot{z}_0 = v_0 \sin(\alpha)$ (1)

$\dot{z} = -g_L . t + v_0 \sin(\alpha)$

$\dot{y} = 0$ (1)

$\dot{x} = v_0 \cos(\alpha)$

On integre avec $x_0 = 0$: $y_0 = 0$; $z_0 = 0$ (1)

$z = -\frac{1}{2} g_L . t^2 + v_0 . t . \sin(\alpha)$

$y = 0$ (1)

$x = v_0 . t . \cos(\alpha)$

On elimine t : $t = x / v_0 \cos(\alpha)$ (1)

$\Rightarrow z(x) = -\frac{1}{2} \frac{g_L}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha) x$. (1)

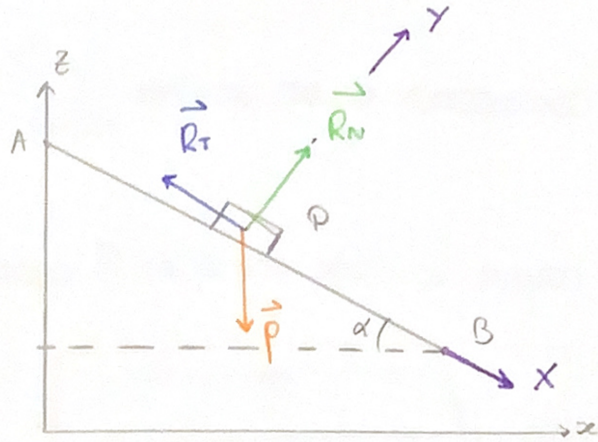
On a $z(x) = 0$ pour $x = \frac{2 v_0^2}{g_L} \cos^2(\alpha) \tan(\alpha)$

$$\boxed{x = \frac{v_0^2}{g_L} . \sin(2\alpha)}$$ (1)

② Comme $x \propto \frac{1}{g_L}$ si $g_L = \frac{1}{6} g_T \Rightarrow x_L = 6 x_T$ ①

↳ On aura un saut 6 fois plus long soit $\boxed{d_L = 9m}$

* Exercice 8



① Système {paquet}

Referentiel : Terrestre (Galilien)

Bilan forces : $\vec{P} = -mg\,\vec{u_z}$

$\vec{R_N} = R_N . \vec{u_Y}$

$\vec{R_T} = -R_T\,\vec{u_X}$

On a donc (PFD) : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{R_T}$

On projette sur $\vec{u_X}$ et $\vec{u_Y}$:

$m\ddot{X} = mg\sin(\alpha) - R_T$

$m\ddot{Y} = -mg\cos(\alpha) + R_N$

Il n'y a pas de mouvement selon Y : soit $\ddot{Y} = 0 \Leftrightarrow \boxed{R_N = mg\cos(\alpha)}$

On déduit $\boxed{R_T = f\,R_N = f mg\cos(\alpha)}$

On réinjecte : $m\ddot{X} = mg\sin(\alpha) - f mg\cos(\alpha)$

$\ddot{X} = g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))$

On intègre avec $\dot{X}_0 = 0$

$\dot{X} = gt(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))$

On integre avec $X_0 = 0$

$$\boxed{X = \frac{1}{2} g t^2 (\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))}$$

B correspond à une distance $\frac{h}{\sin(\alpha)} = \frac{d}{\cos(\alpha)}$ suivant l'axe X

Le paquet va donc arriver en B quand $X = \frac{h}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{2} g t_B^2 (\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))$

$$\Leftrightarrow \boxed{t_B = \sqrt{\frac{2h}{g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))\sin(\alpha)}}}$$

Comme $h = d$ on a un triangle rectangle soit $\alpha = \pi/4 = 45°$

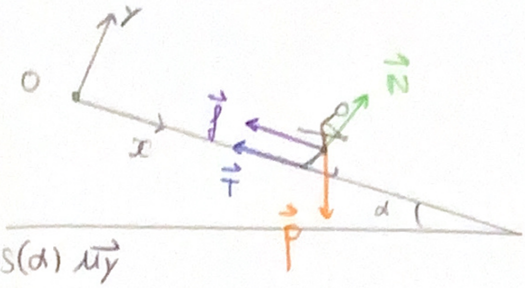
$\hookrightarrow \boxed{t_B = 1.8 s}$

② Le chariot reste immobile pendant $\delta t = 1 s$, il faut que le paquet arrive en B quand le chariot y est. Comme il met 1.8 s pour arriver en B, il faut le lâcher en 1.8 s et 0.8 s avant que le chariot arrive

Le chariot met un temps $t = \frac{C_0 C_B}{v_0} = 4 s$ à arriver au point B

Il faut lacher le paquet 3.2 s - 2.2 s après le debut du jeu.

* Exercice 9 :



① Système {skieur}

Référentiel : Terrestre (Galiléen)

Bilan force : $\vec{P} = +m\vec{g} = mg\sin(\alpha)\vec{u_x} - mg\cos(\alpha)\vec{u_y}$

$\vec{F} = -k\vec{v} = -k.\dot{x}\,\vec{u_x}$

$\vec{T} = -T.\vec{u_x}$

$\vec{N} = N\vec{u_y}$

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{T} + \vec{N}$

On projette : $m\ddot{x} = mg\sin(\alpha) - k\dot{x} - T$

$m\ddot{y} = N - mg\cos(\alpha)$

Aucun mouvement sur y : $\ddot{y} = 0 \iff \boxed{N = mg\cos(\alpha)}$

$\Rightarrow \boxed{T = f\,mg\cos(\alpha)}$

② On intègre : $\dot{y} = 0$ et $y = 0$

Suivant x : $\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))$

On pose $X = \dot{x}$: $\dot{X} + \frac{1}{\tau}X = g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))$ $\quad (\tau = m/k)$

On résout : $X(t) = Ae^{-t/\tau} + \tau g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))$

à $t = 0$: $X(0) = 0 \Rightarrow A = -\tau g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))$

$\Rightarrow \boxed{X(t) = \dot{x}(t) = \tau g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))(-e^{-t/\tau} + 1)}$

On integre :

$$x(t) = \tau g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))[+\tau e^{-t/\tau} + t] + C$$

à $t=0$: $x=0 \iff C = -\tau^2 g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))$

Et $\boxed{x(t) = \tau g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))[\tau(-1+e^{-t/\tau}) + t]}$

③ a) - Quand $t \to +\infty$ la vitesse vaut : $\boxed{v_{lim} = \tau g(\sin(\alpha) - f\cos(\alpha))}$

↳ Note c'est la solution particulière de l'equa diff

Ainsi $\boxed{v = v_{lim}(-e^{-t/\tau} + 1)}$

b) Application numerique : $\boxed{v_{lim} = 56 m/s}$

④ On cherche t_1 tq $v = v_l/2$

$$\iff 1 - e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{2}$$

$$\iff e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{2} \qquad \iff \frac{-t_1}{\tau} = -\ln(2) \qquad \iff \boxed{t_1 = \tau \ln(2) = 55 \text{ sec}}$$

⑤ Cette fois $v_0 = v_{lim}/2$ et $T = 10 \cdot f \cdot m \cdot g$

$$\ddot{x} = g(\sin(\alpha) - 10 f\cos(\alpha))$$

$$\dot{x} = gt(\sin(\alpha) - 10 f\cos(\alpha)) + v_{lim}/2$$

↳ Arrêt quand $\dot{x} = 0 \iff$ $t_a = \dfrac{v_{lim}}{2} \cdot \dfrac{1}{g(\sin(\alpha) - 10 f\cos(\alpha))}$

$$x = \frac{1}{2} g t^2 (\sin(\alpha) - 10 f\cos(\alpha)) + \frac{v_{lim}}{2} t + d_1$$

$\boxed{d_a = x(t_a) - d_1 = 6{,}2 m}$