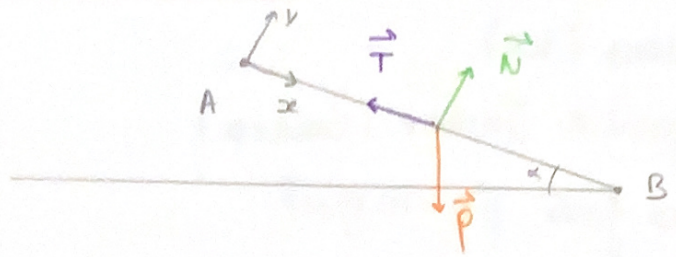


Correction exercices 112.2 - Travail et énergie

* Exercice 1:

① Les 3 forces sont constantes.



$$\text{Bilan forces: } \vec{T} = -T \vec{u}_x$$

$$\vec{N} = N \vec{u}_y$$

$$\vec{P} = mg \sin(\alpha) \vec{u}_x - mg \cos(\alpha) \vec{u}_y$$

$$\bullet W(\vec{T})_{AB} = -T \vec{u}_x \cdot AB \vec{u}_x$$

$$W(\vec{T})_{AB} = -TAB$$

$$\bullet W(\vec{N})_{AB} = N \vec{u}_y \cdot AB \vec{u}_x$$

$$W(\vec{N})_{AB} = 0$$

$$\bullet W(\vec{P})_{AB} = (mg \sin(\alpha) \vec{u}_x - mg \cos(\alpha) \vec{u}_y) \cdot AB \vec{u}_x$$

$$W(\vec{P})_{AB} = m \cdot g \cdot AB \sin(\alpha) = 33,3 \text{ kJ}$$

Comme il n'y a pas de mouvement suivant y: $\ddot{y} = 0 = N - mg \cos(\alpha)$

$$\Leftrightarrow N = mg \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow T = \mu \cdot m \cdot g \cos(\alpha)$$

$$W(\vec{T})_{AB} = -\mu \cdot m \cdot g \cos(\alpha) \cdot AB = -3,3 \text{ kJ}$$

② Theoreme de l'énergie cinétique: $\Delta E_c = \sum W(\vec{F})$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m \cancel{v_A^2}^{=0} = W(\vec{T}) + W(\vec{N}) + W(\vec{P})$$

$$v_B^2 = \frac{2}{m} [W(\vec{T}) + W(\vec{P})] \Rightarrow v_B = 18 \text{ m/s}$$

* Exercice 2:

① Système {sac}

Referentiel: Terre (Galilée)

Bilan forces: $\vec{p} = -mg \vec{u}_z$

$W(\vec{p})_{AB} = -mgh = -19.6 \text{ kJ} < 0$ car le travail du poids est résistant

② TEC: $\Delta E_c = W(\vec{p})$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = +mgh$$

$\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2gh} = 14 \text{ m/s}$

③ Pour avoir l'équation horaire on utilise le théorème en instantané:

$$\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{v}$$

$$d\left(\frac{1}{2} m \dot{z}^2\right)/dt = -mg \dot{z}$$

$$m \dot{z} \ddot{z} = -mg \dot{z} \Leftrightarrow \ddot{z} = -g$$

On intègre: $\dot{z} = -gt$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

Touche le sol par $z = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1.4 \text{ s}$

* Exercice 3:

① Le palet est soumis à $\vec{p}$, $\vec{R}_N$, $\vec{R}_T$

Système {palet}

Referentiel: Terre (Galilée)

Bilan forces: $\vec{p} = -mg \vec{u}_z$

$$\vec{R}_N = +R_N \vec{u}_z$$

$$\vec{R}_T = -fmg \vec{u}_x$$

On utilise le TEC: $\Delta E_c = \sum W(\vec{F})$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W(\vec{p}) + W(\vec{R}_N) + W(\vec{R}_T)$$
$$= 0 + 0 - fmg \cdot AB$$

On peut traverser si $v_B^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 - fmgd > 0$

$$\Leftrightarrow v_A > \sqrt{2fgd}$$

② Si le plan est incliné d'un angle α :

$$W(\vec{R}_N) = 0$$

$$W(\vec{R}_T) = -fmgd$$

$$W(\vec{p}) = mgd \sin(\alpha)$$

$\Rightarrow$ On traverse si $\frac{1}{2} m v_A^2 > fmgd - mgd \sin(\alpha)$

$$v_A > \sqrt{2gd(f - \sin(\alpha))}$$

- toujours le cas si $\sin(\alpha) \geq f$

- vitesse minimum si $\sin(\alpha) < f$

* Exercice 4 :

Cube accélère de A à O puis ralentit de O à B. On cherche OB

Système {Cube}

Referentiel : Terrestre (Galiléen)

Bilan forces : $\vec{p} = mg \sin(\alpha) \vec{u}_x - mg \cos(\alpha) \vec{u}_y$

$$\vec{R}_N = R_N \vec{u}_y$$

$$\vec{T} = -kx \vec{u}_x \quad (\text{seulement sur OB})$$

TEC : entre A et O

$$\Delta E_{c_n} = \frac{1}{2} m v_o^2 - 0 = L \cdot mg \sin(\alpha) (*) \Rightarrow v_o = \sqrt{2Lg \sin(\alpha)}$$

TEC entre B et B

$$\Delta E_{c_z} = \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_o^2 = OB \cdot m \cdot g \sin(\alpha) + W(\vec{T}) \quad \leftarrow \Delta \text{ non nulle}$$

$$\text{On calcul : } W(T) = \int_0^B -kx \cdot dx = -\frac{1}{2} k[x^2]_0^B = -\frac{1}{2} k OB^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} m v_o^2 = OB \cdot mg \sin(\alpha) - \frac{1}{2} k OB^2 = -L mg \sin(\alpha) (*)$$

$$\Leftrightarrow OB^2 - \frac{2 mg \sin(\alpha)}{k} OB - \frac{2 L mg \sin(\alpha)}{k} = 0$$

$$\Leftrightarrow OB^2 - 2b OB - 2bL = 0 \quad \text{avec } b = \frac{mg \sin(\alpha)}{k}$$

$$\Rightarrow \text{Solution } \boxed{OB = b + \sqrt{b^2 + 2bL}}$$

* Exercice 5:



$$\textcircled{1} E_m = E_c + E_p$$

$$= E_c + E_{pp} + E_{pe}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mgz + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + 0 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\textcircled{2} \text{ Le système \{masse } m\} \text{ est soumis à : } \vec{p} = m \vec{g} \text{ (Conservatif)}$$

$$\vec{T} = -k(l - l_0) \vec{u}_x \text{ (Conservatif)}$$

$$\vec{R}_N = R_N \cdot \vec{u}_z$$

Le mouvement est uniquement selon $\vec{u}_x$

$$L_{\bullet} W(\vec{R}) = R_N \vec{u}_z \cdot d \cdot \vec{u}_x = 0. \text{ (Elle ne travaille pas)}$$

$\Rightarrow$ Seuls des forces conservatives travaillent

$\Rightarrow E_m$ se conserve : $E_m = \text{cte.}$

$\textcircled{3}$ On utilise $E_m = \text{cte}$

$$E_m(x_0) = \frac{1}{2} m \dot{x}_{(x_0)}^2 + \frac{1}{2} k x_0^2 \quad (\text{à } t=0)$$

$$= 0 \text{ (sans vitesse initiale)}$$

$$= E_m(x=0) = \frac{1}{2} m \dot{x}(0)^2 + \frac{1}{2} k \times 0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}(0)^2 \quad \Leftrightarrow \dot{x}(0) = x_0 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

* Exercice 6 :



① On a dit dans le cours qu'une force conservative derive d'une energie potentielle

$$\text{Soit : } -\frac{dE_p}{dx} = F \Leftrightarrow dE_p = -F \cdot dx$$

$$\text{Or on a } \vec{F} = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2} \vec{u}_x \quad (\text{Avec } \vec{OM} = x \cdot \vec{u}_x)$$

$$\text{Ainsi } E_p = -\int \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2} dx$$

$$= -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{x^2} dx = +\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} + \text{cte}$$

Si on prend $E_p = 0$ pour $x \rightarrow +\infty$: on trouve cste = 0

$$\Rightarrow E_p(x) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x}$$

Ainsi $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x}$$

② La seule force est conservative (venant d'une energie potentielle) donc $E_m = \text{cte}$

$$\bullet \text{ A } t = 0 : E_m(+\infty) = \frac{1}{2} m v_0^2 + 0$$

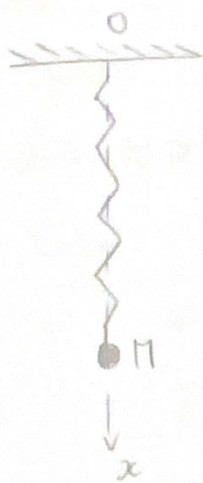
$\hookrightarrow "x = +\infty"$

$$\text{③ Comme } E_m = \text{cte} : \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\text{Au plus proche la particule fait } 1/2 \text{ tour : } \dot{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x = d = \frac{qQ}{2\pi m v_0^2 \epsilon_0}$$

* Exercice 7:



$$① \quad E_{pp} = -mgx$$

$$② \quad E_{pe} = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 \\ = \frac{1}{2} k (x - l_0)^2$$

Ainsi $E_p = E_{pp} + E_{pe}$

$$E_p = -mgx + \frac{1}{2} k (x - l_0)^2 + \text{cte.}$$

③ A l'équilibre on a $dE_p/dx = 0$

$$\frac{dE_p}{dx} = -mg + kx_{eq} - kl_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

④ On pose $X = x - x_{eq} \Leftrightarrow x = X + x_{eq}$

On réinjecte:

$$E_p = -mgX - mgx_{eq} + \frac{1}{2} k (X + \underbrace{x_{eq} - l_0}_{mg/k})^2$$

$$= -mgX - mgx_{eq} + \frac{1}{2} k (X + mg/k)^2$$

$$= -mgX - mgl_0 - \frac{(mg)^2}{k} + \frac{1}{2} k X^2 + \cancel{kX \frac{mg}{k}} + \frac{1}{2} k (mg/k)^2$$

$$= -\cancel{mgX} - mgl_0 - \frac{(mg)^2}{k} + \frac{1}{2} k X^2 + \cancel{mgX} + \frac{1}{2} \frac{(mg)^2}{k}$$

$$= \frac{1}{2} k X^2 - mgl_0 - \frac{1}{2} \frac{(mg)^2}{k}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k X^2 + \text{cte.}$$

⑤ Ainsi $\bar{E}_m = \bar{E}_c + \bar{E}_p$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 + cste$$

Toutes les forces sont conservatives ($\vec{p}$ et $\vec{T}$) donc $E_m = cste$

$$\frac{dE_m}{dx} = \frac{1}{2} m \dot{x} \ddot{x} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 k x \dot{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow m \ddot{x} + k x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

* Exercice 8 :

① Système : $\{ \Pi \}$

Referentiel : Terre (Galiléen)

Bilan : $\vec{p} = -mg\vec{y}$ (Conservative)

$\vec{T} = -k(l-l_0)[\cos(\alpha)\vec{u}_y - \sin(\alpha)\vec{u}_x]$ (Conservative)

$\vec{R} = R \cdot \vec{u}_y$ (ne travaille pas : $\perp$ mvmt)

$E_p = E_{pp} + E_{pe}$

$= mgy + \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$

$= 0 + \frac{1}{2}k(\sqrt{b^2+x^2}-l_0)^2$

$E_p = \frac{1}{2}k(\sqrt{b^2+x^2}-l_0)^2$

② Equilibre $\Leftrightarrow dE_p/dx = 0$: $E_p = \frac{1}{2}k(b^2+x^2) - k\sqrt{b^2+x^2} \cdot l_0 + \frac{1}{2}kl_0^2$

$\frac{dE_p}{dx} = kx - k \frac{2x l_0}{2\sqrt{b^2+x^2}} = 0$

$(\frac{1}{\sqrt{u}})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$= x(1 - \frac{l_0}{\sqrt{b^2+x^2}}) = 0$

* Soit $x = 0$

* Soit $1 - \frac{l_0}{\sqrt{b^2+x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{b^2+x^2} = l_0$ (possible si $b < l_0$)

$\Leftrightarrow x^2 = l_0^2 - b^2$

$x = \pm \sqrt{l_0^2 - b^2}$ (tjrs si $b < l_0$)

Par étudier la stabilité on regarde le signe de d^2E_p/dx^2

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\frac{1}{\sqrt{u}})' = -\frac{u'/2\sqrt{u}}{u}$

$= -\frac{u'}{2u^{3/2}}$

$\frac{d^2E_p}{dx^2} = k(1 - \frac{l_0}{\sqrt{b^2+x^2}}) + \frac{x \cdot l_0 \cdot 2xk}{2(x^2+b^2)^{3/2}}$

• En $x = 0$

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} = k \left(1 - \frac{l_0}{b} \right) \begin{cases} > 0 \text{ si } b < l_0 : \text{stable} \\ < 0 \text{ si } b > l_0 : \text{instable} \end{cases}$$

• en $x = \sqrt{l_0^2 - b^2}$

$$\frac{d^2 E_p}{dx^2} = k \left(1 - \frac{l_0}{l_0} \right) + \frac{k \cdot 2 l_0 (l_0^2 - b^2)}{2 l_0^3}$$

$$= + \frac{k(l_0^2 - b^2)}{l_0^2}$$

$$= k \left(1 - \frac{b^2}{l_0^2} \right) > 0 \text{ si } b < l_0 \text{ (obligatoire pour cette solution)}$$

↳ stable

③ a). Que des forces conservatives ($\vec{R}$ ne travaille pas) $\Rightarrow E_m = \text{cste}$

$$E_m = E_c + E_p \\ = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (\sqrt{b^2 + x^2} - l_0)^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 - k l_0 \sqrt{b^2 + x^2} + \text{cste.}$$

b) Si $x \ll b$: $\sqrt{b^2 + x^2} = b \sqrt{1 + (x/b)^2} \simeq b \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right)$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 - k l_0 b \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{b^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 - k l_0 b - \frac{1}{2} k x^2 \frac{l_0}{b}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \left(1 - \frac{l_0}{b} \right) + \text{cste.}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2} m \dot{x} \ddot{x} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 k x \dot{x} \left(1 - \frac{l_0}{b} \right)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{b} \right) x = 0$$

$$\text{ainsi } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k(1 - l_0/b)}{m}}$$