Corrections exercices E3 - Statique fluides

* Exercice 1 :

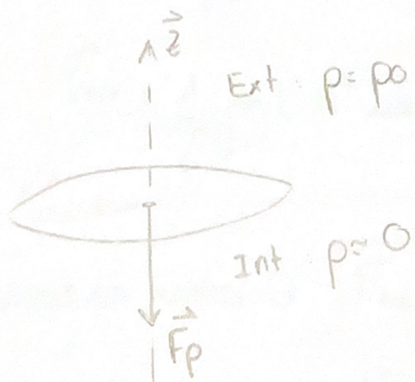
① Quand il n'y a pas de vide, les pressions sont les mêmes à l'intérieur et à l'extérieur => les forces sont les mêmes : elles se compensent.

↳ La résultante des forces est nulle.

② La pression ext est $p_{atm} \simeq 10^5$ Pa

=> $\frac{p_{int}}{p_{ext}} = \frac{0{,}2}{10^5} = 0.0002\,\%$ c'est bien négligeable.

③



$d\vec{F_p} = -p_0 . d\vec{S} = -p_0 \, dS \, \vec{u_z}$

Comme la pression p_0 est uniforme $\vec{F_p} = -p_0 \int d\vec{S} = -p_0 \vec{S}$

Ainsi $\boxed{F_p = p_0 . \pi r^2 = 1{,}3 \; 10^4 \text{ N} \quad F_p = 13 \text{ kN}}$ C'est le poids d'une masse pesant une tonne !

* Exercice 2

z vers le haut

① Pour obtenir $p(z)$ on résout l'équation de la statique des fluides : $\frac{dp}{dz} = -\rho g$

$$dp = -\rho g \, dz$$

$\rho g = cste$

$$p(z) = \int -\rho g \, dz = -\rho g \int dz = -\rho g z + A$$

Or en $z = H$ on a $p = p_0$

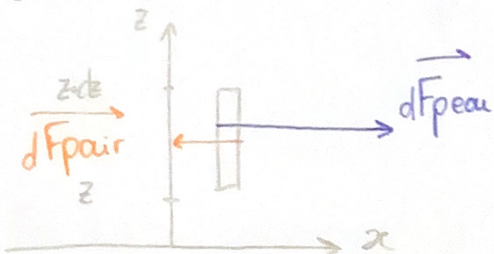
$$p(H) = -\rho g H + A = p_0 \iff A = p_0 + \rho g H$$

On réinjecte

$$p(z) = -\rho g z + p_0 + \rho g H$$

$$\boxed{p(z) = \rho g (H - z) + p_0}$$

② Sur une tranche de hauteur dz :



On a donc $\overrightarrow{dF_{tot}} = \overrightarrow{dF_{pair}} + \overrightarrow{dF_{peau}}$

$$= -p_0 \, dS \, \vec{u_x} + p(z) \, dS \, \vec{u_x}$$

$$= -p_0 \cdot L \cdot dz \, \vec{u_x} + (\rho g (H-z) + p_0) L \, dz \, \vec{u_x}$$

$$= [\cancel{-p_0 L \, dz} + \rho g (H-z) L \, dz + \cancel{p_0 L \, dz}] \vec{u_x}$$

$$\boxed{\overrightarrow{dF_{tot}} = \rho g (H-z) L \, dz \, \vec{u_x}}$$

③ Par avoir la force sur tout le barrage il faut "sommer" toutes les forces sur chaque dz : "sommer" sur dz c'est integrer.

$$\vec{F_{tot}} = \int_0^H d\vec{F_{tot}} = \int_0^H \rho g (H-z) L \, dz \, \vec{u_x}$$

$$= \rho g L \int_0^H (H-z) dz \, \vec{u_x}$$

$$= \rho g L \left[\int_0^H H dz - \int_0^H z dz \right] \vec{u_x}$$

$$= \rho g L \left[Hz - \frac{z^2}{2} \right]_0^H \vec{u_x}$$

$$= \rho g L \left[H^2 - \frac{H^2}{2} - H0 + \frac{0^2}{2} \right] \vec{u_x}$$

$$\boxed{\vec{F_{tot}} = \frac{1}{2} \rho g L H^2 \vec{u_x}}$$

④ Application numeriQ : $\boxed{F_{tot} = 7{,}7 \; 10^{11} N}$

$$p = mg = \rho_b V . g$$

$$= \rho_b \, H . L . E g = \boxed{5{,}8 \; 10^{11} N = p}$$

=> F_{tot} et p du <u>même ordre de grandeur</u>

* Exercice 3

L'iceberg subit la pousse d'Archimede de $\begin{cases} \text{l'eau (Volume } V - Ve) \\ \text{l'aire (Volume } Ve) \end{cases}$

Ainsi Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g} = \rho g \cdot V \cdot \vec{g}$

$$\vec{\Pi}_{air} = -\rho a \cdot Ve \cdot \vec{g}$$

$$\vec{\Pi}_{eau} = -\rho e \cdot (V - Ve)\vec{g}$$

A l'equilibre $m\vec{a} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{\Pi}_{air} + \vec{\Pi}_{eau}$

Suivant z : $0 = -\rho g \cancel{g} V + \rho a Ve\cancel{g} + \rho e (V - Ve)\cancel{g}$

On cherche $\frac{V}{Ve}$: on divise par Ve

$$0 = -\rho g \frac{V}{Ve} + \rho a + \rho e \left(\frac{V}{Ve} - 1 \right)$$

$$\frac{V}{Ve}(-\rho g + \rho e) + \rho a - \rho e = 0$$

$$\frac{V}{Ve}(-\rho g + \rho e) = \rho e - \rho a$$

$$\boxed{\frac{V}{Ve} = \frac{\rho e - \rho a}{\rho e - \rho g} = 9{,}47}$$

=> la partie immergé est 10 fois plus grosse que la partie visible.

* Exercice 4 :

① Même méthode qu'à l'exercice 3 :

$$\vec{0} = m\vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi a} + \vec{\Pi e}$$

$$= -\rho g \cdot V \cdot \cancel{g} + \rho a (V - V')\cancel{g} + \rho e V' \cancel{g}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = -\rho g + \rho a \left(1 - \frac{V'}{V}\right) + \rho e \frac{V'}{V}$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho g - \rho a = \frac{V'}{V}(-\rho a + \rho e)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{V'}{V} = \frac{\rho g - \rho a}{\rho e - \rho a} = 0.92}$$

② Avant la fonte il occupe un volume dans l'eau qui vaut V', à la fin, une fois fondu, il occupe un volume Vf

Par conservation de la masse : $m = mf$

$$\rho g \cdot V = \rho e \cdot Vf$$

$$\Rightarrow \quad Vf = \frac{V}{\rho e} \cdot \rho g =$$

$$\text{Or } V = V' \cdot \frac{\rho e - \rho a}{\rho g - \rho a}$$

$$\text{Donc } Vf = V' \cdot \frac{\rho g}{\rho e} \cdot \frac{\rho e - \rho a}{\rho g - \rho a} = V' \times \frac{1 - \rho a/\rho e}{1 - \rho a/\rho g}$$

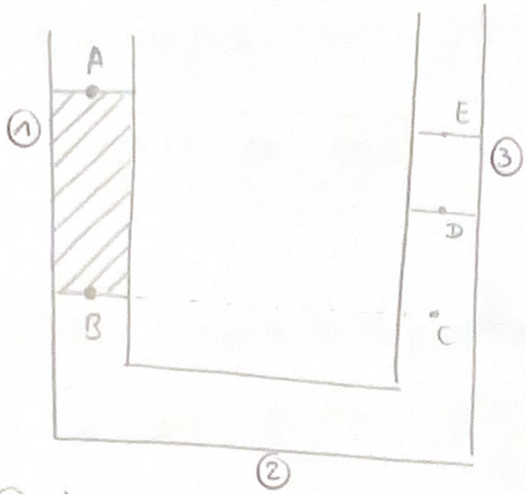
$$\boxed{Vf = 1{,}00\, V'}$$

Le volume reste le même le niveau d'eau ne change pas

* Exercice 5 :

① Equation statiQ des fluides $dp/dz = -\rho g$

Si ρ = cste on a : $p(z) = -\rho g z + A$



② La pression à la surface des liquide vaut $p_A = p_E = p_0$

On déduit $p_B = p_0 + \rho_1 g h_1$

$$p_D = p_0 + \rho_3 g (h_3 - h_2)$$

Dans le même liquide à la même altitude la pression est la même : $p_B = p_C$

$$p_C = p_B = p_D + \rho_2 g h_2 =$$

$$p_0 + \rho_1 g h_1 = p_D + \rho_2 g h_2$$

$$\cancel{p_0} + \rho_1 \cancel{g} h_1 = \cancel{p_0} + \rho_3 \cancel{g} (h_3 - h_2) + \rho_2 \cancel{g} h_2$$

$$\Leftrightarrow \rho_1 h_1 = \rho_3 (h_3 - h_2) + \rho_2 h_2$$

$$\Leftrightarrow \rho_3 (h_3 - h_2) = \rho_2 h_2 - \rho_1 h_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho_3 = \frac{\rho_2 h_2 - \rho_1 h_1}{h_3 - h_2} = 6{,}7 \cdot 10^2 \ kg \cdot m^{-3}}$$

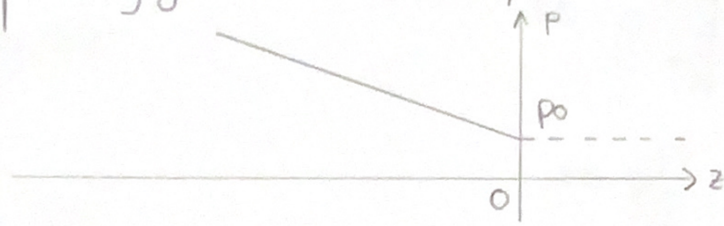
* Exercice 6 :

① De même que précédemment : $dp/dz = -\rho g$

Si $\rho = cste$: $p(z) = -\rho g z + A$

A la surface ($z = 0$) : $p(0) = p_0 = -\rho g \cdot 0 + A \iff A = p_0$

$\Rightarrow \boxed{p(z) = p_0 - \rho g z}$



② a) - Lorsque la respiration est bloquée la quantité de matière se conserve

$$n = cste = \underbrace{\frac{p_0 \cdot V_M}{RT_i}}_{\text{A la surface}} = \underbrace{\frac{p(z) \cdot V(z)}{RT_i}}_{\text{Sous l'eau}}$$

Ainsi $\boxed{V(z) = \frac{p_0 \cdot V_M}{p(z)} = V_M \cdot \frac{p_0}{p_0 - \rho g z}}$

A $z = -10$ m on trouve $\boxed{V(-10) = 3{,}6 \cdot 10^{-3}\ m^3 = 3{,}6\ L.}$

b) - Flotabilité : $\vec{F} = -mg\,\vec{u_z} + \rho V^* g\,\vec{u_z}$

$\boxed{\vec{F} = (\rho V^* - m) g\,\vec{u_z} > 0}$ car la masse volumique moyenne du plongeur est plus faible à la surface, elle diminue en descendant car $V^* \downarrow$

④ Si A la profondeur $z = 5$m on veut $F = 0$

$$F = -(m + m_1)g + \rho\left[V_0 + V(z)\right]g$$
$$= -(m + m_1)g + \rho\left[V_0 + V_M \cdot \frac{p_0}{p_0 - \rho g z}\right]g$$

$\iff \boxed{m_1 = \rho\left[V_0 + V_M \frac{p_0}{p_0 - \rho g z}\right] - m = 1{,}7\ kg}$

* Exercice 7 :

① Statique des fluides : $dp/dz = -\rho g \Leftrightarrow dp = -\rho g\, dz$

Or pour un gaz parfait : $pV = nRT = \frac{m}{\Pi} RT \Leftrightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{p\Pi}{RT}$

Ainsi $dp = -\frac{p\Pi}{RT} g \cdot dz$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\Pi g}{RT} dz$$

On intègre : $\int \frac{1}{p} dp = \int -\frac{\Pi g}{RT} dz \Leftrightarrow \ln(p) = -\frac{\Pi g}{RT} z + \text{cste}$

$$\Leftrightarrow p = \text{cste}' \cdot e^{-\frac{\Pi g}{RT} z}$$

A $z = 0$ $p = p_0$:

$p(0) = p_0 = \text{cste}' \cdot e^0$

$$\Rightarrow \boxed{p(z) = p_0 e^{-z/H} \quad \text{avec } H = \frac{RT}{\Pi g}}$$

② a) - On reprend la même chose mavec $T = T_0 - kz$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\Pi g}{R} \cdot \frac{1}{T_0 - kz} \cdot z$$

On intègre $\int \frac{1}{p} dp = -\frac{\Pi g}{R} \int \frac{1}{T_0 - kz} dz$

$$\ln(p(z)) = +\frac{\Pi g}{kR} \ln(T_0 - kz) + A$$

en $z = 0$: $p(z) = p(0) = p_0 =$

$\ln(p_0) = +\frac{\Pi g}{kR} \ln(T_0) + A \Leftrightarrow A = \ln(p_0) - \frac{\Pi g}{kR} \ln(T_0)$

Finalement $\ln(p(z)) = +\frac{Mg}{kR}\ln(T_0 - kz) - \frac{Mg}{kR}\ln(T_0) + \ln(p_0)$

$$= +\frac{Mg}{kR}\ln\left(\frac{T_0 - kz}{T_0}\right) + \ln(p_0)$$

Soit $p(z) = p_0 \cdot e^{+Mg/kR \ln(T_0 - kz/T_0)}$

$$= p_0\left(\frac{T_0 - kz}{T_0}\right)^{+Mg/kR}$$

$$\boxed{p(z) = p_0\left(1 - \frac{kz}{T_0}\right)^{T_0/kH}}$$

b) - pour $z = 8850\,m$: $p(8850) = 0{,}34$ bar

③ pour $z \ll H$: $z/H \ll 1$ donc $e^{z/H} \simeq 1 + \frac{z}{H}$

$\Rightarrow p(z) = p_0\, e^{-z/H} \simeq p_0\left(1 - \frac{z}{H}\right)$.

$(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon$

$\Rightarrow p(z) = p_0\left(1 - \frac{k}{T_0}z\right)^{T_0/kH} \simeq p_0\left(1 - \frac{T_0}{kH}\cdot\frac{k}{T_0}z\right) = p_0\left(1 - \frac{z}{H}\right)$

Les deux modèles conduisent à une fonction affine $\boxed{p(z) = p_0(1 - z/H)}$

* Exercice 8 :

① Système {Hélium}

Référentiel : Terrestre (Galilée)

Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g} = \rho_{He} . V . \vec{g}$

$\vec{\Pi}_A = - \rho_a . V . \vec{g}$

Ainsi $\boxed{\vec{F} = \vec{P} + \vec{\Pi}_A = (\rho_{He} - \rho_a) V . \vec{g}}$

② Au niveau du sol $\vec{F}(0) = (0,179 - 1,293) . 1,0 . 9,81 \, (-\vec{u_z})$

$\boxed{\vec{F}(0) = 10,9 \, N \, \vec{u_z}}$

③ $\vec{F}(2 \, km) = (\rho_{He}(2km) - \rho_a(2km)) V . \vec{g}$

il faut calculer les masses volumiques. Comme ce sont des gaz parfait

$pV = nRT = \frac{m}{M} RT \iff \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$

$\vec{F}(2km) = \frac{P}{RT} (M_{He} - M_{air}) V \vec{g}$

$\boxed{\vec{F}(2km) = 8,9 \, N \, \vec{u_z}}$

④ Pour atteindre $z = 2km$ il faut que la portance compensent le poids du ballon

- La portance totale vaut : $F . V_{tot}$
- Le poids est $P = Mg$

Ainsi il faut $\boxed{V_{tot} = \frac{Mg}{F(2km)} = \frac{MRT\cancel{g}}{p(M_{He} - M_{air})\cancel{g}} = 553 . 10^3 \, m^3}$

⑤ Si le ballon est cylindrique : $V_{tot} = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 . L \iff \boxed{L = \frac{4 V_{tot}}{\pi D^2} = 348 \, m}$