TB2	Chapitre M3.1	Oscillateur harmonique
Cours		

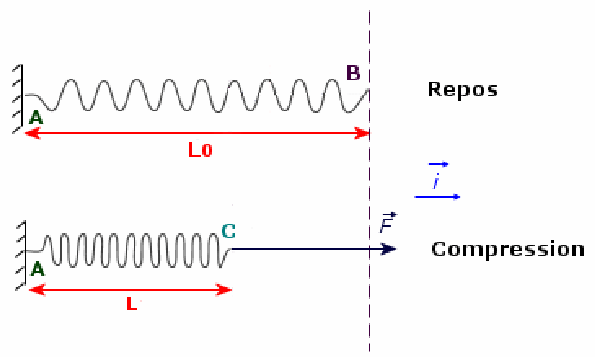
I – L'oscillateur harmonique

A – Rappel : la force de tension d'un ressort

- Un ressort linéaire est caractérisée par sa longueur au repos l_0 et son coefficient de raideur k. Dans le modèle idéal, il est de masse négligeable et toute variation de sa longueur produit sur chacune de ses extrémités la force :

$$\vec{T}=-k.(l-l_0)\vec{e_{r\to p}}\ (Loi\,de\,Hooke)$$

- Avec l la longueur du ressort et $\vec{e_{r\to p}}$ orienté du ressort vers son attache.

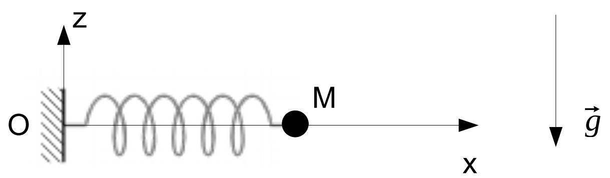


Exemple : dans le cas ci-contre, le ressort étant compressé, on sait instinctivement qu'il va « repousser » un objet qui lui est attaché. La force qu'il exercerait sur un objet au point C vaut :

$$\vec{F}=+k(l-l_0).\vec{i}$$

B – Étude d'un système masse-ressort

- Dans cette partie, on considère un point matériel M, de masse m, lié à un ressort de raideur k, de longueur à vide l_0 et de masse négligeable. Le point M peut glisser sans aucuns frottements sur le support horizontal. On repère par x son abscisse. On déplace le point M de sa positon d'équilibre d'une valeur x_0 et on le lâche sans vitesse initiale.



- Faisons l'étude des forces qui s'exercent sur le système afin de déterminer son mouvement. On considérera que le point M est a l'abscisse x = 0 lorsque le ressort est à la longueur d'équilibre l_0.

Système {le point M}

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Bilan des forces : $\vec{p}=m.\vec{g}=-m.g.\vec{u_z}$

$\vec{F_r}=-k(l-l_0).\vec{u_x}=-k.x.\vec{u_x}$

$\vec{R}=R.\vec{u_z}$

On peut appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD)

$$m.\vec{a}=\vec{p}+\vec{F_r}+\vec{R}$$

En projetant sur les axes $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ on obtient :

$$\begin{pmatrix} m.\ddot{x} \\ m.\ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k.x \\ -m.g+R \end{pmatrix}$$

Comme le point M reste sur le support horizontale, et qu'il n'y a aucun mouvement selon z, on trouve :

z = 0 et R = m.g

Si on regarde ce qui se passe suivant l'axe x :

$$\ddot{x} = \frac{-k}{m}.x \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}.x = 0$$

On obtient une équation différentielle d'un oscillateur harmonique. En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ on obtient :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2.x = 0} \text{ Oscillateur harmonique}$$

- ✗ Cette équation différentielle est l'équation obtenue pour tout les oscillateur harmoniques, c'est-à-dire pour tout système qui oscille autour de sa position d'équilibre, sans frottements. Mais nous allons voir comment résoudre cette équation et obtenir le mouvement de la masse M.

C – L'oscillateur harmonique

- ✗ Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, un oscillateur harmonique à pour équation différentielle :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2.x = 0}$$

- ✗ Nous allons résoudre cette équation :

On résout cette équation différentielle comme pour une équation du premier degré, mais cette fois on aura deux solutions s_1 et s_2 pour l'équation homogène :

- Équation homogène : $\ddot{x} + \omega_0^2.x = 0$

On remplace par s et on obtient : $s^2 + \omega_0^2 = 0$

→ On trouve directement : $s = \pm j.\omega_0$ (avec j le nombre imaginaire tel que j² = -1)

→ Solution homogène : $\boxed{x_h(t) = A.\exp(j.\omega_0.t) + B.\exp(-j.\omega_0.t)}$

- Solution particulière :

→ On trouve directement : $\boxed{x_p(t) = 0}$

- Aux conditions initiales : x (t = 0) = x_0 ; v (t = 0) = 0

$$x(t=0) = x_0 = A + B$$

$$v(t=0) = 0 = \dot{x}(t=0) = A.\omega_0 - B.\omega_0 \quad \Leftrightarrow \quad A - B = 0$$

On déduit directement : $A=B=\frac{x_0}{2}$

$$\boxed{x(t)=\frac{x_0}{2}.[\exp(j.\omega_0.t)+\exp(-j.\omega_0.t)]}$$

Le mouvement du point M correspond à des oscillations sinusoïdales autour de sa position d'équilibre.

Note : Au lieu d'avoir le résultat sous forme d'exponentielles on peut l'exprimer avec des sinus et des cosinus. En effet mathématiquement, grâce aux formules trigonométriques on peut montrer que :

$$\exp(j.\omega_0.t)+\exp(-j.\omega_0.t)=2\cos(\omega_0.t)$$

On obtient alors :

$$\boxed{x(t)=x_0.\cos(\omega_0.t)}$$

On retrouve bien des oscillations périodiques et sinusoïdales autour de la position d'équilibre.

Note : Dans le cas ou les solutions s_1 et s_2 possèdent des parties imaginaires opposées, on peut choisir d'exprimer la solution homogène comme :

$$\boxed{x_h(t)=C.\cos(\omega_0.t)+D.\sin(\omega_0.t)}$$

Et on finit le calcul comme ci-dessus.

- ✗ On obtient donc une forme particulière pour les solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique. On peut définir plusieurs grandeurs qui interviennent dans cette solution.

Dans le cas général la solution pour un oscillateur harmonique simple est :

$$\boxed{x(t)=X_m.\cos(\omega_0.t+\phi)=C.\cos(\omega_0.t)+D.\sin(\omega_0.t)=\frac{X_m}{2}.[\exp(j.\omega_0.t)+\exp(-j.\omega_0.t)]}$$

Avec : X_m : l'amplitude des oscillations (même unité que x, souvent en m)

ϕ : la phase à l'origine (sans unité)

ω_0 : la pulsation propre des oscillations, telle que : $\omega_0=2.\pi.f_0=\frac{2.\pi}{T_0}$ (en rad.s^{-1})

II – L'oscillateur harmonique amorti

- ✗ Il est possible de faire l'étude du même système mais sans négliger les frottements cette fois. Pour faire cette étude, on rajoute au bilan des forces une force de frottement fluide de la forme :

$$f=-h.\vec{v}$$

- ✗ On reprend le même système et les mêmes conditions initiales que précédemment, et on regarde quel résultat on va obtenir.

Système {le point M}

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Bilan des forces : $\vec{p}=m.\vec{g}=-m.g.\vec{u}_z$

$\vec{F}_r=-k(l-l_0).\vec{u}_x=-k.x.\vec{u}_x$

$\vec{R}=R.\vec{u}_z$

$\vec{f}=-h.\vec{v}=-h.\dot{x}.\vec{u}_x$

On peut appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD)

$$m.\vec{a}=\vec{p}+\vec{F}_r+\vec{R}+\vec{f}$$

En projetant sur les axes $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ on obtient :

$$\begin{pmatrix} m.\ddot{x} \\ m.\ddot{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -k.x-f.\dot{x} \\ -m.g+R \end{pmatrix}$$

Comme le point M reste sur le support horizontale, et qu'il n'y a aucun mouvement selon z, on trouve :

$$z = 0 \quad \text{et} \quad R = m.g$$

Si on regarde ce qui se passe suivant l'axe x :

$$\ddot{x}=\frac{-k}{m}.x-\frac{f}{m}.\dot{x} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}+\frac{f}{m}.\dot{x}+\frac{k}{m}.x=0$$

On obtient une équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti.

En posant $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q=\frac{\sqrt{k.m}}{f}$ on obtient :

$$\boxed{\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}.\dot{x}+\omega_0^2.x=0} \quad \text{Oscillateur harmonique amorti}$$

On résout cette équation différentielle comme pour une équation du premier degré, mais cette fois on aura deux solutions s_1 et s_2 pour l'équation homogène :

- Solution particulière :

→ On trouve directement : $\boxed{x_p(t)=0}$

- Équation homogène : $\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}.\dot{x}+\omega_0^2.x=0$

On remplace par s et on obtient : $s^2+\frac{\omega_0}{Q}.s+\omega_0^2=0$

Pour trouver la solution, il faut savoir si le discriminant (Δ) de l'équation du second degré est positif ou négatif. Pour cela il faut le calculer et regarder en fonction des valeurs de Q (le facteur de qualité)

$$\Delta=\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2-4.\omega_0^2=\omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)$$

Il y a donc trois possibilités :

- $\Delta > 0$ (ou $Q < 1/2$) : il y a deux solutions réelles : $s_{1/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{-\omega_0}{Q}\pm\omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2}-4}\right)$

Et on trouve : $\boxed{x(t)=A\exp(s_1.t)+B.\exp(s_2.t)}$: régime apériodique

- $\Delta = 0$ (ou $Q = 1/2$) : il y a une unique solution : $s=\frac{1}{2}\left(\frac{-\omega_0}{Q}\right)$

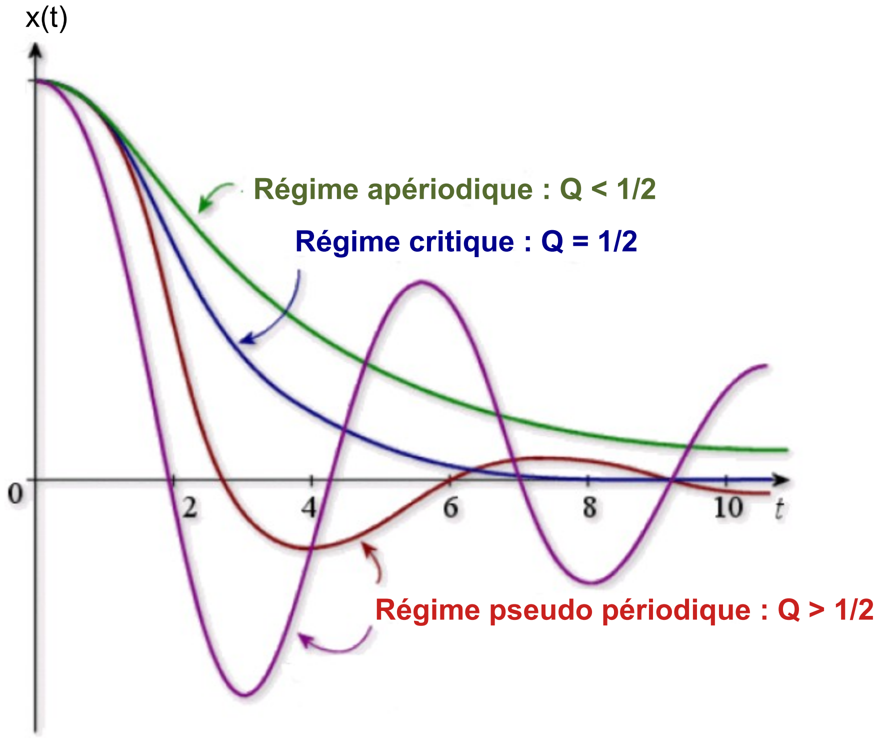
Et on trouve : $\boxed{x(t)=(A.t+B)\exp(s.t)}$: régime critique

- $\Delta < 0$ (ou $Q > 1/2$) : il y a deux solutions complexes : $s_{1/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{-\omega_0}{Q}\pm j.\omega_0.\sqrt{4-\frac{1}{Q^2}}\right)=\frac{1}{\tau}\pm j\omega$

Et on trouve : $x(t)=A\exp(s_1.t)+B.\exp(s_2.t)$

En développant : $\boxed{x(t)=\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right).[C.\cos(\omega.t)+D.\sin(\omega.t)]}$: régime pseudo périodique

- En exprimant les conditions initiales dans chacun des cas on obtient les courbes suivantes :



- ✗ En régime apériodique : lorsque les frottements sont importants, le point n'oscille pas, il retourne vers sa position d'équilibre en changeant de sens au plus une fois (en fonction des conditions initiales)

- ✗ En régime critique les frottements sont importants aussi. Ce régime est similaire au régime apériodique, mais c'est la cas limite avant d'avoir des oscillations, c'est le système revient le plus rapidement à l'équilibre sans effectuer d'oscillations.

- ✗ En régime pseudo-périodiques, les frottements sont moins importants. Le point oscille autour de sa position d'équilibre avec une pseudo pulsation ω (défini plus haut), son amplitude d'oscillation diminue exponentiellement avec un temps caractéristique τ (défini plus haut).

- ✗ Ces trois régimes sont des régimes transitoire, et à la fin le point M retourne à sa position d'équilibre au bout de quelques τ

III – Étude énergétique

A – L'énergie potentielle élastique

- ✗ Dans le chapitre M2.2 nous avons vu qu'une force conservative dérivait d'une énergie potentielle, ce qui est le cas pour la force de tension d'un ressort, aussi appelée force de rappel élastique. On peut alors définir un énergie potentielle élastique pour un point M lié à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 telle que :

$$\boxed{E_{p,e}=\frac{1}{2}k(l-l_0)^2}$$

- ✗ On va voir que cet énergie nous permet de réaliser une étude énergétique et ainsi de retrouver certains résultats précédents.

B – Retour à l'équation différentielle

- ✗ On considère le même système qu'en partie I- B, soit un système masse-ressort sans frottements, et on fait l'étude énergétique.

Si le système est sans frottement et soumis uniquement à des forces conservatives, son énergie interne se conserve :

$$E_m=E_c+E_{p,p}+E_{p,e}=\frac{1}{2}.m.\dot{x}^2+m.g.z+\frac{1}{2}.k.x^2=cste$$

En dérivant par rapport au temps :

$$\frac{dE_m}{dt}=0=\frac{1}{2}.m.2.\dot{x}.\ddot{x}+m.g.0+\frac{1}{2}.k.2.x.\dot{x}$$

En simplifiant par $\dot{x}$:

$$\boxed{m.\ddot{x}+k.x=0} \text{ oscillateur harmonique}$$

→ L'étude énergétique permet de retrouver l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

Note : Le raisonnement inverse permet de prouver depuis l'équation différentielle que l'énergie mécanique se conserve.

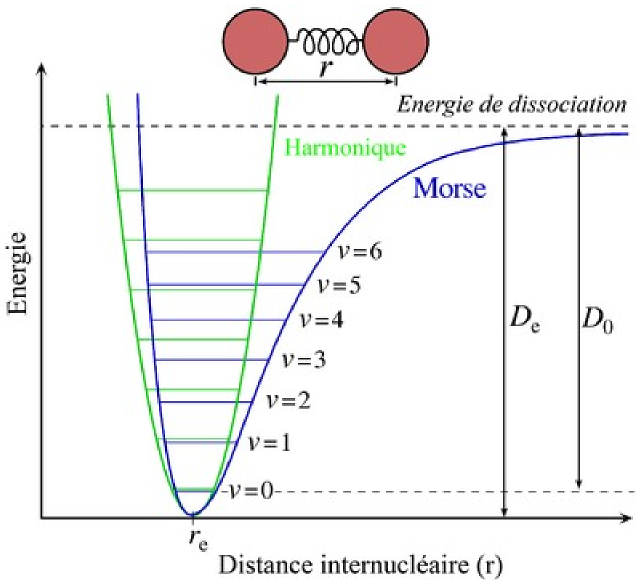
C – Notion d'équilibre

- ✗ Comme il a été vu au chapitre M2.2, on peut définir une position d'équilibre pour un point en fonction de son énergie potentielle. En effet un point est à l'équilibre s'il est a un minium d'énergie potentielle, c'est-à-dire un point où la dérivée de l'énergie potentielle est nulle :

$$\boxed{Equilibre \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2E_p}{dx^2}=0}$$

- ✗ Ainsi à partir de cette définition, pour tout système autour de sa position d'équilibre, on peut définir dans un cas général l'équation différentiel avec toutes les grandeurs caractéristiques.

D – Oscillation autour de la position d'équilibre (pour aller plus loin)



Dans les molécules, les atomes sont liés par des liaisons, que l'on peut modéliser par des ressorts, et faire la même étude que dans les parties précédentes afin de montrer que les atomes vibrent de façon périodique.

Mais comme le montre le graphique ci contre, le véritable potentiel des atomes n'est pas celui de l'oscillateur harmonique sans frottement, on ne pourrait donc pas faire la même étude dans un cas réel.

On peut s'affranchir du problème de ne pas connaître toutes les forces qui s'appliquent sur un atome en raisonnant sur l'énergie potentielle. On regarde alors des oscillations autour de sa position d'équilibre.

Atour de la position d'équilibre, noté $x_{éq}$, on peut développer à l'ordre 2 l'énergie potentielle telle que :

$$E_p(x)=E_p(x_{éq})+(x-x_{éq})\frac{dE_p}{dx}+\frac{1}{2}.(x-x_{éq})^2.\frac{d^2E_p}{dx^2}=E_p(x_{éq})+\frac{1}{2}.(x-x_{éq})^2.\frac{d^2E_p}{dx^2}$$

En considérant la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}.m.\dot{x}^2+E_p(x_{éq})+\frac{1}{2}.(x-x_{éq})^2.\frac{d^2E_p}{dx^2}=cste$$

On dérive :

$$\frac{dE_m}{dt}=0=\frac{1}{2}.m.2.\dot{x}.\ddot{x}+\frac{1}{2}.2.x.\dot{x}.\frac{d^2E_p}{dx^2}$$

On retrouve :

$$\boxed{m.\ddot{x}+\frac{d^2E_p}{dx^2}.x=0}$$

Dans le cas d'un ressort on a $\frac{d^2E_p}{dx^2}=k$ ce qui redonne l'équation connue.