Correction exercices M3 - 1 - Oscillateur :

* Exercice 1 :

① . La fonction $\cos(\omega t + \varphi)$ varie de $+1$ à -1.

↳ $X_m \cos(\omega t + \varphi)$ varie de $+X_m$ à $-X_m$ => parcours $2X_m = 20$ cm

$\Leftrightarrow \boxed{X_m = 10 \text{ cm}}$

. La fréquence $f = 2{,}0$ Hz est reliée à la pulsation par : $\boxed{\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f = 13 \text{ rad/s}}$

. $x(0) = 5 = X_m \cos(\varphi)$

$\Leftrightarrow \cos(\varphi) = 1/2 \quad \Leftrightarrow \boxed{\varphi = \pi/3 = 60°}$

. $x(t_1) = X_m \cos(\omega_0 \cdot t_1 + \varphi) = \underline{5{,}0 \text{ cm}}$

② $v(t) = \dot{x}(t) = X_m \cdot (-\omega_0) \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\boxed{\dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)}$

Elle est maximale quand $\sin(\omega_0 t + \varphi)$ vaut $+1$ ou -1

↳ $\boxed{v_{max} = \pm \omega_0 \cdot X_m = 1{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$

③ $a(t) = \ddot{x}(t) = \dot{v}(t) = -\omega_0^2 \cdot X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$= -\omega_0^2 \cdot x(t)$

$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$: oscillateur harmoniQ.

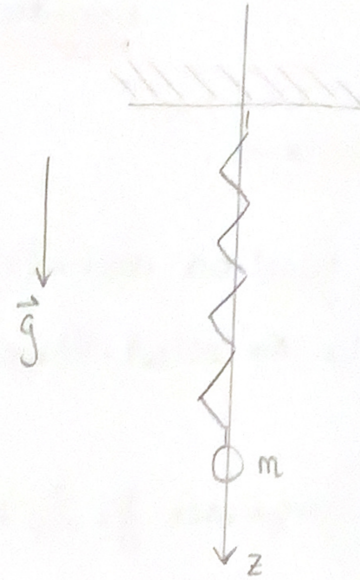
* Exercice 2 :

① Système : {objet M}

Référentiel : Terrestre (Galiléen)

Bilan des forces : $\vec{P} = + mg\, \vec{u_z}$

$\vec{T} = - k(z - l_0)\, \vec{u_z}$



A l'équilibre $\vec{a}(t) = \vec{0}$ donc $\vec{0} = \vec{P} + \vec{T}$

On projette sur $\vec{u_z}$: $0 = + mg - k(z_{eq} - l_0)$ (*)

$$\Leftrightarrow \boxed{z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}}$$

② On reprend le bilan précédent avec $\vec{a} \neq \vec{0}$

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

$$m\ddot{z} = + mg - k(z - l_0)$$

$$= + mg - k(z - z_{eq} + z_{eq} - l_0)$$

$$= + mg - k(z - z_{eq}) - k(z_{eq} - l_0)$$

$$= - ku \underbrace{+ mg - k(z_{eq} - l_0)}_{= 0\ (*)}$$

De plus comme $\ddot{(z - z_{eq})} = \ddot{z} = \ddot{u}$ on a : $\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0}$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ oscillateur harmoniQ

③ On résout cette équation.

$u_h(t) = u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

à $t=0$: $z=z_{eq} \Rightarrow u(0)=0$ et $\dot{u}(0)=v_0$

- $u(0) = 0 = A$.
- $\dot{u}(0) = +B\cdot\omega_0 = v_0 \Leftrightarrow B = v_0/\omega_0$

Finalement : $\boxed{u(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

④ $E_p = E_{pp} + E_{pe}$

$$= -mg\cdot z + \frac{1}{2}k(z-l_0)^2$$

On introduit $u = z - z_{eq} \Leftrightarrow z = u + z_{eq}$

$$E_p = -mg(u+z_{eq}) + \frac{1}{2}k(u+z_{eq}-l_0)^2$$

$$= -mg(u) - mg(z_{eq}) + \frac{1}{2}ku^2 + ku(z_{eq}-l_0) + \frac{1}{2}k(z_{eq}-l_0)^2$$

Or (*) $ku(z_{eq}-l_0) = mgu$

$$E_p = -\cancel{mgu} - mgz_{eq} + \frac{1}{2}ku^2 + \cancel{mgu} + \frac{1}{2}k(z_{eq}-l_0)^2$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}ku^2 + \underbrace{\frac{1}{2}k(z_{eq}-l_0)^2 - mgz_{eq}}_{=\text{cste}}}$$

⑤ $E_m = E_c + E_p$

$$= \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ku^2 + \text{cste}$$

avec $u(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

$\dot{u}(t) = v_0\cos(\omega_0 t)$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}k\frac{v_0^2}{\omega_0^2}\sin^2(\omega_0 t) + \text{cste}$$

or $\omega_0^2 = k/m$

$\cos^2+\sin^2 = 1$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}v_0^2\cdot m\sin^2(\omega_0 t) + \text{cste} = \boxed{\frac{1}{2}mv_0^2 + \text{cste} = \text{cste}' = E_m}$$

* Exercice 3

① Systeme : {objet M}

Referentiel : terrestre (Galiléen)

Bilan forces : $\vec{P} = - mg\,\vec{e_z}$

$\vec{R} = + R\,\vec{e_z}$

$\vec{T_1} = - k\,(AM - l_0)\,\vec{e_x} = -k\,(x + l_{eq} - l_0)\,\vec{e_x}$

$\vec{T_2} = + k\,(BM - l_0)\,\vec{e_x} = k\,(l_{eq} - x - l_0)\,\vec{e_x}$

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T_1} + \vec{T_2}$

• sur $\vec{u_z}$: $0 = P + R \iff P = -mg = -R$

• sur $\vec{u_x}$: $m\ddot{x} = - k\,(x + l_{eq} - l_0) + k\,(l_{eq} - x - l_0)$

$m\ddot{x} = - 2kx$

$$\iff \boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{m}\,x = 0}$$

② Si on pose $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$ on retrouve $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0$: oscillateur harmoniQ

Soit $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = \boxed{\pi\cdot\sqrt{\frac{2m}{k}} = T_0}$

③ On resout l'equation differentielle :

$x_h(t) = x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

• à $t = 0$ $x(0) = x_0$; $v(0) = 0$

- $x(0) = x_0 = A$
- $\dot{x}(0) = 0 = B\omega_0$

$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)}$$

4

- $\boxed{E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t)}$

- $E_p = \frac{1}{2} k (x + \ell_{eq} - \ell_0)^2 + \frac{1}{2} k (\ell_{eq} - x - \ell_0)^2 + \text{cste}$

↳ pour $x = 0$: $E_p = 0$

$\Rightarrow \text{Cste} = -\frac{1}{2} k (\ell_{eq} - \ell_0)^2 - \frac{1}{2} k (\ell_{eq} - \ell_0)^2 = -k(\ell_{eq} - \ell_0)^2$

$$\Rightarrow E_p(x) = \frac{1}{2} k (x + \ell_{eq} - \ell_0)^2 + \frac{1}{2} k (\ell_{eq} - x - \ell_0)^2 - k(\ell_{eq} - \ell_0)^2$$

$$= \frac{1}{2} k \Big[x^2 + \cancel{2x(\ell_{eq} - \ell_0)} + \cancel{(\ell_{eq} - \ell_0)^2} + x^2 - \cancel{2x(\ell_{eq} - \ell_0)} + \cancel{(\ell_{eq} - \ell_0)^2} - \cancel{2(\ell_{eq} - \ell_0)^2}$$

$E_p(x) = k x^2$

$\boxed{E_p(x) = k x_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}$

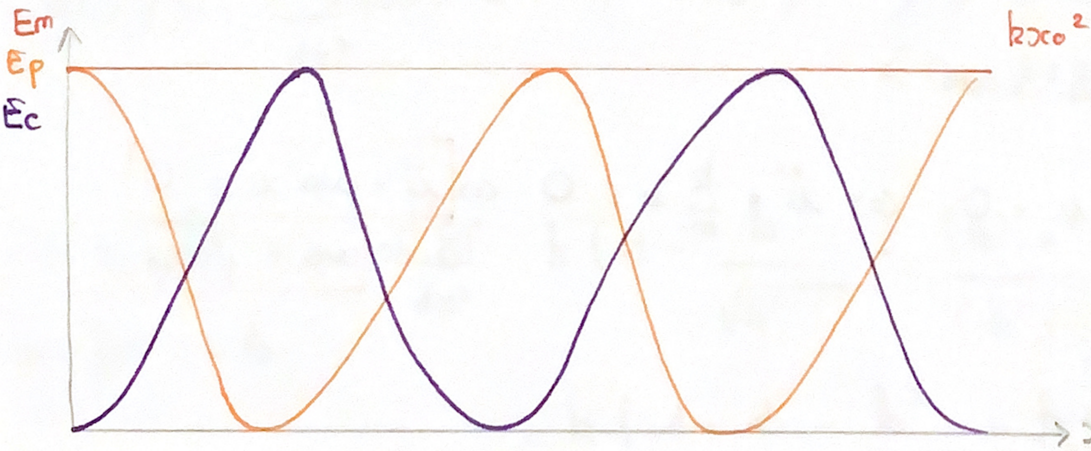
- $E_m = E_c + E_p$

$= \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + k x_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$

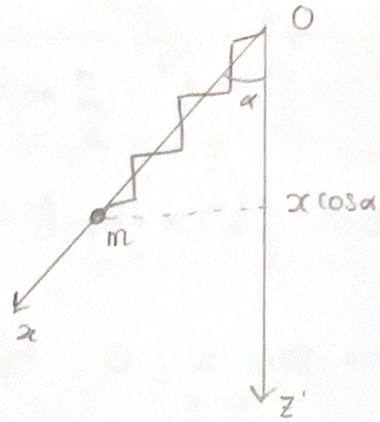
$= \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{m} x_0^2 \cdot \frac{\cancel{2} k}{\cancel{m}} \sin^2(\omega_0 t) + k x_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$

$= k x_0^2 \left(\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t) \right)$

$\boxed{E_m = k x_0^2}$



* Exercice 4 :



① $E_p = E_{pp} + E_{pe}$

$$= -mgz' + \frac{1}{2} k (x - l_0)^2 + cste$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k (x - l_0)^2 - mgx\cos(\alpha) + cste}$$

② On a equilibre quand $dE_p/dx = 0$ et stable : $d^2E_p/dx^2 > 0$ (minimum E_p)

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot 2 (x_{eq} - l_0) - mg\cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_{eq} = l_0 + \frac{mg\cos(\alpha)}{k}}$$

② On utilise $x = u + x_{eq}$

$$E_p = \frac{1}{2} k \left(u + \cancel{l_0} + \frac{mg\cos(\alpha)}{k} - \cancel{l_0} \right)^2 - mg\left(u + l_0 + \frac{mg\cos(\alpha)}{k}\right) \cdot \cos(\alpha) + cste$$

$$= \frac{1}{2} k u^2 + \cancel{u \cdot mg\cos(\alpha)} + \cancel{\frac{1}{2} \frac{(mg\cos(\alpha))^2}{k}} - \cancel{mgu\cos(\alpha)} - mgl_0\cos(\alpha) - \cancel{\frac{(mg\cos(\alpha))^2}{k}}$$

$$= \frac{1}{2} k u^2 - mgl_0\cos(\alpha) + cste$$

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2} k u^2 + cste'}$$

③ Uniquement des forces conservatives $\Rightarrow E_m = cste \Leftrightarrow dE_m/dt = 0$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} k u^2 + cste$$

$$\frac{dE_m}{dt} = m \cancel{\dot{u}} \ddot{u} + k \cancel{\dot{u}} u = 0 \Leftrightarrow \ddot{u} + \frac{k}{m} u = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0}$$

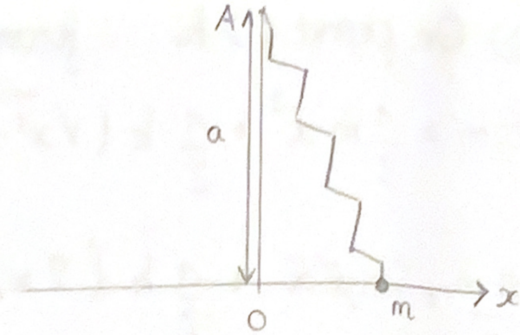
avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k/m}}$

④ $$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

* Exercice 5

① $E_p(x) = \cancel{mg} z_0 + \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 + cste$ ($z = 0$)

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{a^2 + x^2} - \ell_0\right)^2 + cste}$$



$(u^2)' = 2 u u'$
$(\sqrt{u})' = u' / 2\sqrt{u}$

② Equilibre si $dE_p/dx = 0$

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{\cancel{2}} k \cdot \cancel{2} \left(\sqrt{a^2+x^2} - \ell_0\right) \frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} = 0$$

. Solutions : $\begin{cases} \boxed{x_q = 0} \\ \sqrt{a^2+x^2} - \ell_0 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow a^2 + x^2 = \ell_0^2$

$\Leftrightarrow \boxed{x_{eq} = \pm\sqrt{\ell_0^2 - a^2}}$ ⚠ si $a < \ell_0$

. Stabilité : $\frac{dE_p}{dx} = k \cdot \left[x - \frac{\ell_0 x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = k\left[1 - \ell_0 \frac{\sqrt{a^2+x^2} - x \cdot {}^{2x}/_{2\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2+x^2}\right]$$

$$= k \cdot \left[1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{x^2 \ell_0}{(a^2+x^2)^{3/2}}\right]$$

- en $x = 0$: $\frac{d^2E_p}{dx^2}(0) = k\left(1 - \ell_0/\sqrt{a^2}\right)$: > 0 si $a < \ell_0$: instable
< 0 si $a > \ell_0$: stable

- en $x = \pm\sqrt{\ell_0^2 + a^2}$: $\frac{d^2E_p}{dx^2} = k\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2}} - \frac{(\ell_0^2 - a^2)\ell_0}{(\ell_0^2)^{3/2}}\right)$

↳ il faut $a < \ell_0$

Stable

$$= k\left(1 - 1 - \frac{\ell_0^3 - a^2 \ell_0}{\ell_0^3}\right) = k\left(1 - a^2/\ell_0^2\right) < 0$$

③ On prend $a > \ell_0$: forces conservatives (Et $\vec{R}$ orthogonal au mvmt) $\Rightarrow E_m = cste$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k \left(\sqrt{x^2+a^2} - \ell_0 \right)^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = m \cancel{\dot{x}} \ddot{x} + \frac{1}{2} k \left(2x\cancel{\dot{x}} - \frac{4x\cancel{\dot{x}}\,\ell_0}{2\sqrt{x^2+a^2}} \right)$$

$$= \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) x = 0}$$

④ On a une equation differentielle non lineaire : difficile à resoudre.

En gardant uniquement les termes d'ordre 1 :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right) x = 0 \iff \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

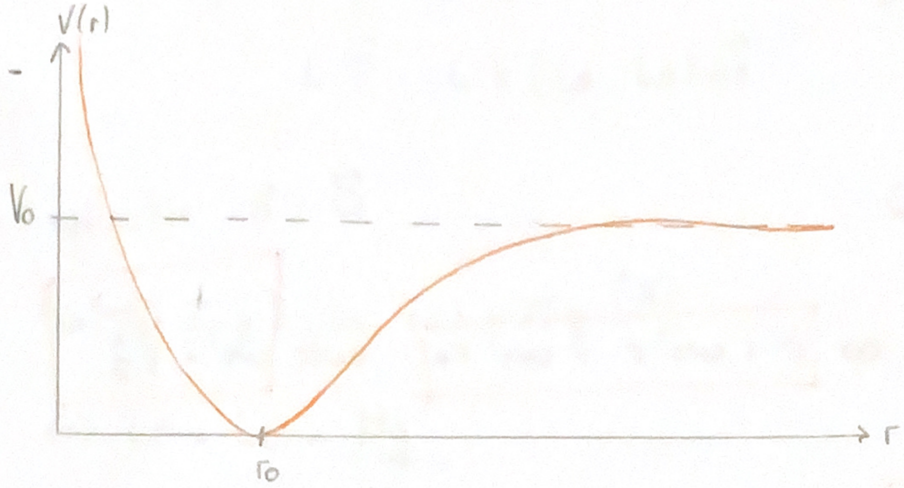
avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}(1 - \ell_0/a)$

Ainsi $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k(1-\ell_0/a)}}}$

* Exercice 6

① $V(r) = V_0 (1 - e^{-\beta(r-r_0)})^2$

a).-



b).- • r_0 est la distance d'equilibre stable : elle correspond à la longueur de liaison

• V_0 correspond à l'ecart d'energie entre les deux atomes à l'infini et deux atomes dans la liaison : c'est l'énergie de liaison

• βr n'as pas d'unité => β en m^{-1}

② Si on se place proche de r_0, à côte de la position d'équilibre on peut retrouver en oscillateur harmoniQ

Si $\beta(r-r_0) \ll 1$ on DL nous donne

$$V(r) = V_0 (1 - e^{-\beta(r-r_0)})^2 \sim V_0 (1 - 1 - \beta(r-r_0))^2$$
$$= V_0 \beta^2 . (r-r_0)^2$$

En posant $\boxed{k = 2 V_0 \beta^2}$ on à : $\boxed{V(r) = \frac{1}{2} k (r-r_0)^2 = E_{pe}}$

Identique à un ressort de longueur à vide r_0 et de raideur $\boxed{k = 1840\ N.m^{-1}}$

③ La force est conservative => E_m = cste

$$E_m = E_c + E_p$$
$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} k (r - r_0)^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = m \cancel{\dot{r}} \ddot{r} + k \cancel{\dot{r}} (r - r_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{r} + \frac{k}{m} r = \frac{k}{m} r_0 \quad \Leftrightarrow \boxed{\ddot{r} + \omega_0^2 r = \omega_0^2 r_0} \quad \text{avec } \boxed{\omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Ainsi $\boxed{f_0 = \omega_0 / 2\pi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}}$

④ a). $E_n = (n + \frac{1}{2}) . h . f_0$

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = (n + 1 + \frac{1}{2}) h f_0 - (n + \frac{1}{2}) h f_0 = h f_0 = \boxed{\begin{matrix} 4{,}0\ 10^{-20}\ J \\ = 0{,}25\ eV \end{matrix} = \Delta E_n}$$

b). On a $\Delta E = h . \nu = hc / \lambda$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hc}{h f_0} = \frac{c}{f_0} = \boxed{5{,}0\ 10^{-6} m = \lambda}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{f_0}{c} = 2000\ cm^{-1}}$$

On a bien une emission dans le domaine IR

$\sigma(C=O) \simeq 1600 - 1850\ cm^{-1}$

Ici on a une valeur plus grande car la liaison est plus forte.

* Exercice 7

① Bilan des forces : $\vec{P} = M \cdot \vec{g} = -Mg\,\vec{u_z}$

$4\vec{T} = -4 \cdot k\,(L_e - L_0)\,\vec{u_z}$

A l'equilibre : $\vec{a} = \vec{0}$

$\hookrightarrow 0 = -4k(L_e - L_0) - Mg \quad (*)$

$$\Leftrightarrow \boxed{L_e = L_0 - \frac{Mg}{4k}}$$

On a $z = R + L \Leftrightarrow z_e = L_e + R = \boxed{L_0 - \frac{Mg}{4k} + R = z_e}$

② On ajoute la force $\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{z}\,\vec{u_z}$ et $\vec{a} = \vec{0}$

$$M\ddot{z} = -Mg - 4k(L - L_0) - h\dot{z}$$

$$= -Mg - 4k(L - L_e + L_e - L_0) - h\dot{z}$$

$$= \underbrace{-Mg - 4k(L_e - L_0)}_{=0\ (*)} - 4k(\underbrace{L - L_e}_{z - z_e}) - h\dot{z}$$

$$M\ddot{z} = -4kz + 4kz_e - h\dot{z}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{h}{M}\dot{z} + \frac{4k}{M}z = \frac{4k}{M}z_e$$

On pose $\boxed{\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}}$ et $\boxed{Q = \frac{M\omega_0}{4h}}$ $\Rightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e}$

b) - Retour à l'equilibre le plus rapide en regime crit. Q : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 0$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{kM}}{2h} \Leftrightarrow \boxed{h = \sqrt{kM}}$$

c)- Si $Q = \frac{1}{2}$ soit $\Delta = 0$

on a : $z_h(t) = (At + B)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}.t} = \boxed{(At+B)e^{-\omega_0 t} = z_h(t)}$

$z_p(t) = z_e = l_0 - \frac{\Pi g}{4k} + R$

- à $t = 0$: $z(0) = z_e - h$; $\dot{z}(0) = 0$

- $z(0) = z_e - h = B + z_e \iff \boxed{B = -h}$

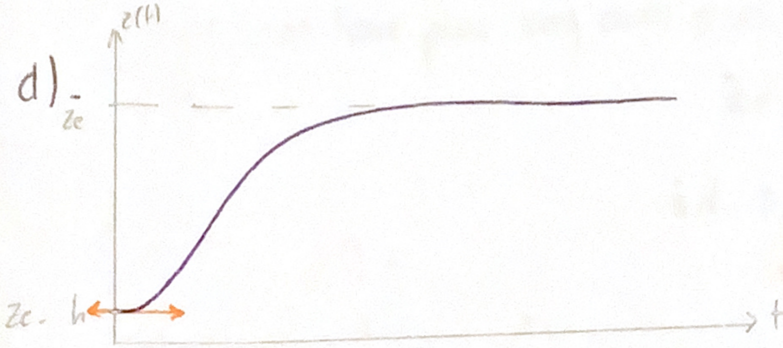
- $\dot{z}(0) = Ae^{-\omega_0 t_0} + (At_0 + B)e^{-\omega_0 t}.(-\omega_0)$

$= A - B\omega_0 = A + h\omega_0 = 0 \iff \boxed{A = -h\omega_0}$

Finalement : $\boxed{z(t) = (-h\omega_0 t - h)e^{-\omega_0 t}}$

⚠ Ici h est la hauteur mais aussi le coefficient de frottements, il ne faut pas confondre

d)-



③ $Q' = \frac{\sqrt{k\Pi'}}{2h} = \frac{\sqrt{k\Pi'}}{2\sqrt{k\Pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Pi'}{\Pi}} = \boxed{0.60 = Q'} > \frac{1}{2}$: $\Delta < 0$ pseudo periodiQ

- $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0$ donc $-\Delta = \Delta' = \omega_0^2(4 - 1/Q^2) > 0$

$\Rightarrow S_{1/2} = \frac{-\omega_0/Q \pm j\omega_0\sqrt{4 - 1/Q^2}}{2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega$ avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$

$\omega = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{4 - 1/Q^2}$

La solution est donc

$$z(t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) + z_e$$

• A $t=0$ $z(0) = z_e - h$ $\dot{z}(0) = 0$

- $z(0) = A + z_e = z_e - h \Leftrightarrow \boxed{A = -h}$

- $\dot{z}(0) = -\frac{1}{\tau}A + \omega B = 0$

$$= \frac{h}{\tau} + \omega B = 0 \quad \Leftrightarrow \boxed{B = -\frac{h}{\omega\tau}}$$

Finalement: $\boxed{z(t) = e^{-t/\tau}\left(-h\cos(\omega t) - \frac{h}{\omega\tau}\sin(\omega t)\right) + z_e}$

=> Regime transitoire plus long avec oscillations : moins confortable.