TB2 Exercices	Chapitre M3.1	Oscillateur harmonique

Exercice 1 : Caractérisation du mouvement d'un anneau

Un anneau au bout d'un ressort oscille de manière sinusoïdale le long d'une tige horizontale à la fréquence de 2,0 Hz. La longueur totale parcourue par la masse entre ces deux positions extrêmes est 20 cm. A l'instant t = 0, la masse est à la position x(0) = 5 cm.

1. Les frottements étant négligés, on choisit de repérer l'anneau par rapport à sa position d'équilibre par la fonction $x(t) = X_m \,.\, \cos(\omega_0.t + \varphi)$. Calculer X_m, ω_0 et φ. En déduire la position de l'anneau à l'instant $t_1 = 1{,}5$ s.

2. Exprimer la vitesse de l'anneau en fonction de X_m , t, ω_0 et φ. Calculer sa vitesse maximale.

3. Établir l'expression de l'accélération de l'anneau en fonction de X_m , t, ω_0 et φ puis en fonction de ω_0 et x. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 2 : Masse au bout d'un ressort vertical

Considérons un objet M, de masse m ; accroché à un ressort de raideur k, et de longueur à vide l_0, se déplaçant sans frottements le long de l'axe vertical Oz. On note $\vec{g} = g.\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur.

1. En effectuant un bilan des forces et en appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'équilibre déterminer la position d'équilibre $z_{éq}$ du point M

2. Posons $u(t) = z(t) - z_{éq}$. Quelle est l'équation différentielle dont u(t) est alors solution ? Commenter le résultat obtenu.

3. L'objet est lâché à t = 0 depuis sa position d'équilibre avec une vitesse initiale $\vec{v_0} = v_0.\vec{e}_z$. Déterminer l'expression de u(t) à chaque instant.

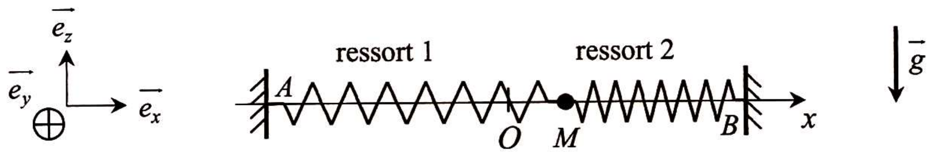
Le mouvement de la masse étant vertical, son énergie potentielle comporte non seulement le terme d'énergie élastique, mais aussi celui de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = -\,m.g.z$.

4. Montrer que l'énergie potentielle totale peut être mise sous la forme $E_P = 1/2\,.\,k.u^2 + cste$

5. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m en fonction de m, v_0, ω_0 et d'une éventuelle constante additive. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 3 : Oscillateur à deux ressorts

Un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m est astreint à glisser sans frottements le long d'une tige horizontale de direction (Ox). Cet anneau est relié par deux ressorts linéaires à deux points fixes A et B distants de D.



Les deux ressorts sont identiques : même constante de raideur k et même longueur à vide l_0. Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent $l_{éq}$, et l'anneau se trouve à l'origine O de l'axe des abscisses. On se place dans le référentiel terrestre, considéré galiléen. A t = 0, le mobile est abandonné, sans vitesse initiale, d'une position $x_0 \neq 0$.

1. Exprimer l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x(t) de l'anneau M.

2. Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation propre ω_0 et la période T_0 en fonction de k et m.

3. Donner l'expression de x(t) compte tenu des conditions initiales.

4. Donner les expressions des énergies potentielle, cinétique et mécanique en fonction de tout ou partie des grandeurs k, x_0, ω_0, t. Par convention l'origine de l'énergie potentielle élastique correspondra à la position d'équilibre ($E_P = 0$ pour x = 0). Représenter ces énergies sur un même graphe en fonction de t.

Exercice 4 : Ressort sur une tige inclinée

Considérons une masse m accrochée à une ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 et pouvant glisser sans frottements sur une tige inclinée d'un angle α par rapport à la verticale. On définit un axe (Ox) selon la direction de la tige avec l'origine O prise à l'autre extrémité du ressort.

1. Déterminer l'énergie potentielle $E_p(x)$ de la masse m.

2. En déduire la position d'équilibre stable $x_{éq}$.

3. Exprimer l'énergie potentielle en fonction de $u = x - x_{éq}$.

4. Établir l'équation différentielle du mouvement de la masse.

5. En déduire la période des petites oscillations.

Exercice 5 : Oscillations le long d'une tige

Un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, est astreint à se déplacer sans frottements le long d'une tige rectiligne horizontale, choisie comme axe (Ox). Il est relié à un ressort (k, l_0) dont l'autre extrémité est fixée en A au dessus de la tige horizontale, tel que AO = a

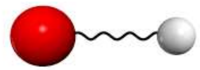
1. Exprimer l'énergie potentielle totale $E_p(x)$.

2. Rechercher les différentes positions d'équilibre et étudier leur stabilité.

3. On étudie alors les oscillations autour de O dans le cas ou $a > l_0$. Établir l'équation différentielle du mouvement.

4. En ne gardant que les terme d'ordre 1 en x (c'est-à-dire en négligeant les termes en x^2, x^3, …) en déduire la période des oscillations.

Exercice 6 : Molécule diatomique



Une molécule de monoxyde de carbone (CO) est modélisée par deux masses ponctuelles ; m_c pour l'atome de carbone et m_o pour l'atome d'oxygène. On négligé le poids des atomes.

1. L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique de Morse :

$$V(r) = V_0\left[1 - \exp(-\beta(r - r_0))\right]^2$$

où r est la distance entre les deux noyaux
et V_0, r_0 et β sont des constantes positives avec $\beta.r_0 \gg 1$.

a). Tracer un graphe de la fonction V(r) faisant apparaître V_0 et r_0.

b). Que représentent physiquement ces deux constantes ? Quelle est la dimension de β ?

2. Montrer qu'il existe un domaine de distance ou l'énergie potentielle d'interaction peut être modélisée par celle d'un ressort de raideur k que l'on calculera.

3. Dans le cadre de cette approximation,on souhaite établir l'équation différentielle décrivant les vibrations de la molécule. C'est un système de deux points, mais on peut considérer que son énergie mécanique est celle d'une particule fictive de masse $m = \frac{m_C.m_O}{m_C + m_O}$, d'abscisse r sur un axe fixe, soumis à l'énergie potentielle V(r). Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction r(t), et en déduire la fréquence f_0 des petites oscillations.

4. A l'échelle atomique on doit utiliser la mécanique quantique pour déterminer les niveaux d'énergie réellement possibles pour la molécules : on obtient les valeurs $E_n = (n + \frac{1}{2}).h.f_0$ avec un n un entier naturel et h la constante de Planck.

a). Calculer numériquement l'écart entre deux niveaux d'énergie successif E_n et E_{n+1}.

b). En déduire la longueur d'onde λ, puis le nombre d'onde σ = 1/λ (en cm^{-1}) d'un photon absorbé par la molécule lors de la transition E_n à E_{n+1}. Comparer aux valeurs données dans la table de spectroscopique infrarouge pour les liaisons C=0 des molécules organiques.

Données : V_0 = 10,77 eV ; β = $2{,}31.10^{10} m^{-1}$: M_C = 12,0 g/mol ; M_O = 16,0 g/mol ; charge élémentaire e = $1{,}6.10^{-19}$ C ; constante d'Avogadro $N_a = 6{,}0.10^{23}$ mol^{-1} ; constante de Planck h = $6{,}63.10^{-34}$ J.s ; célérité de la lumière c = $3{,}00.10^{8}$ m/s

Exercice 7 : Suspension d'une voiture

La suspension d'une voiture est assurée par quatre systèmes identiques indépendants, montés entre le châssis et chaque arbres de roues et constitués chacun :
- D'un ressort hélicoïdal de constante de raideur k et de longueur à vide L_0.
- D'un amortisseur tubulaire à piston, fixé parallèlement au ressort, exerçant une force de frottement visqueux linéaire de coefficient d'amortissement h.

On suppose que le masse totale M (voiture + passagers) est toujours répartie de façon égale entre les quatre systèmes.

Les roues de rayon R sont considérées comme entièrement rigides. On n'envisage que des déplacements verticaux du châssis, repéré par son altitude z par rapport au sol, la longueur commune des quatre ressort est notée L.

1. Le véhicule est immobile sans freins, sur un sol horizontal, quelle est la longueur L_e de ressorts au repos, et la « garde au sol » z_e du véhicule ?

2. Le châssis est abaissé dune hauteur h, puis brusquement libéré sans vitesse initiale.

a). Établir l'équation différentielle de la position z(t) du châssis par rapport au sol, on introduira la grandeur $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}$ et un facteur de qualité Q dont on précisera l'expression.

b). L'amortisseur a été réglé de manière à obtenir un retour à la posiiton d'équilibre final, le plus rapidement possible, lorsque la masse M est seulement celle de la voiture (1100 kg). Quelle doit ^tre la valeur de h en fonction de M et k ?

c). Déterminer alors l'expression complète de la solution z(t) en fonction de z_e, h et ω_0.

d). Tracer l'allure de la courbe représentant l'évolution de z en fonction du temps.

3. La même expérience, avec les mêmes conditions initiales est réalisée sur cette voiture avec à l'intérieur Mr Stalone (150 kg, de muscle bien sur), sa femme (90 kg) et ses trois filles (80 kg chacune). Que vaut alors le facteur de qualité ? Déterminer la solution z(t). Cette situation est-elle plus ou moins confortable que celle de la question 2.b). ?