FO5 | Fiche Outils

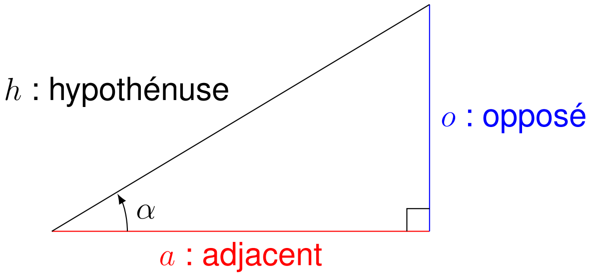
# Trigonométrie



## Introduction

La trigonométrie concerne l’étude des triangles (étude de la taille des triangles) et donc en particulier des fonctions $\sin$, $\cos$ et $\tan$.

## Les fonctions sinus, cosinus et tangente




Théorème de Pythagore :

$$h^2 = a^2 + o^2$$

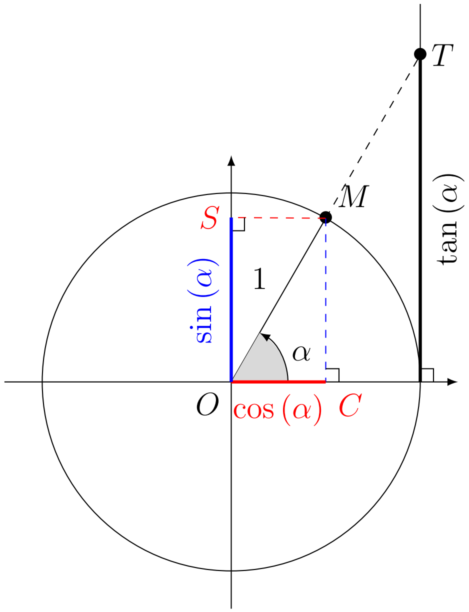
Relations entre un angle et deux longueurs :

$$\sin\alpha = \frac{o}{h}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{h}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{o}{a}$$

## Le cercle trigonométrique



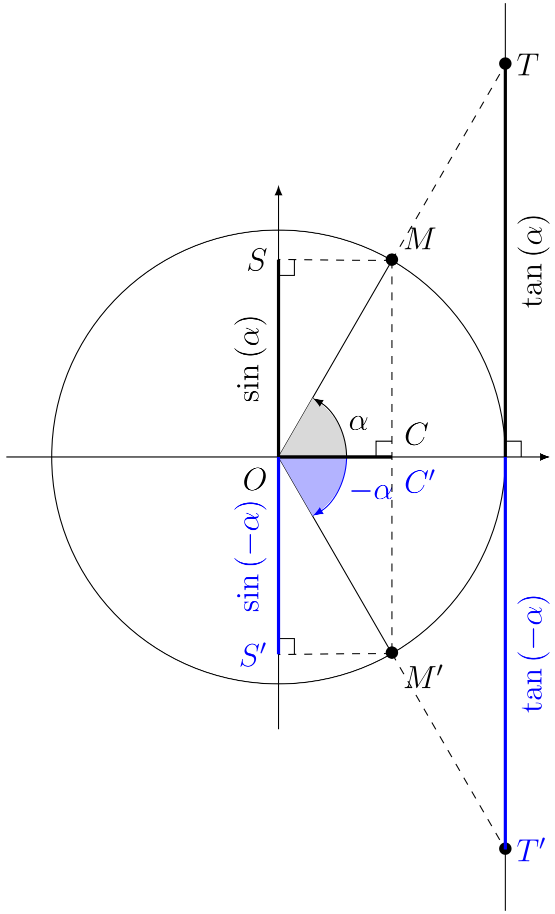
## Périodicités

$$\cos(\alpha + 2n\pi) = \cos(\alpha)$$
$$\sin(\alpha + 2n\pi) = \sin(\alpha)$$

## Parité

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad \text{fonction paire}$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \text{fonction impaire}$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad \text{fonction impaire}$$

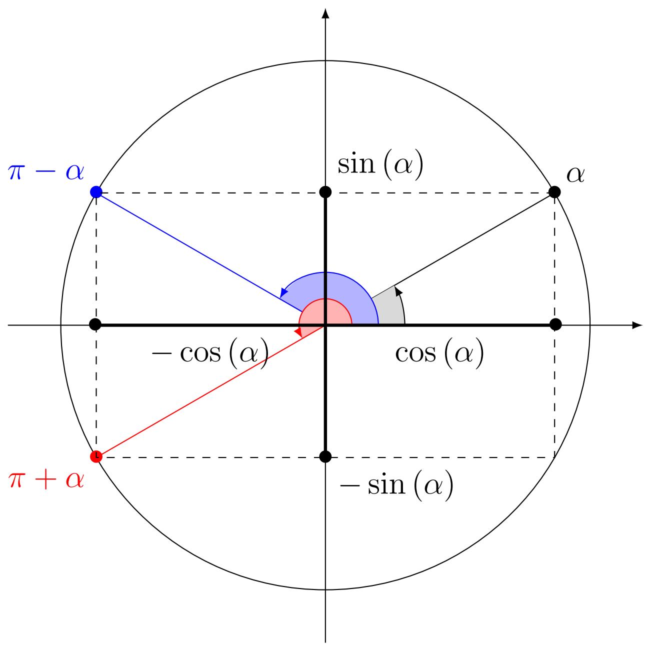
Nous pouvons retrouver ces informations sur le cercle trigonométrique en traçant l'angle $-\alpha$ en bleu sur la figure ci-dessous. Pour le cosinus, $C$ et $C'$ sont confondus donc $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$.



## Rotation de $\pi$

Toutes ces transformations se retrouvent en traçant un cercle trigonométrique :

$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\pi+\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha)$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan(\alpha)$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan(\alpha)$$

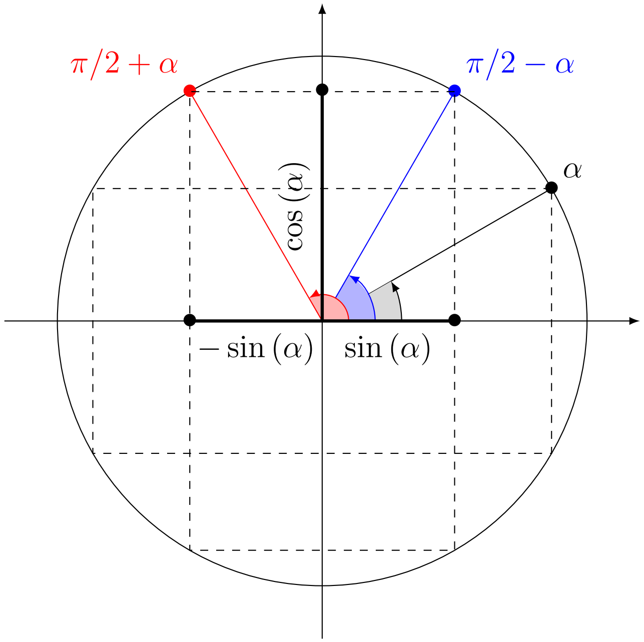



## Rotation de $\pi/2$

Toutes ces transformations se retrouvent en traçant un cercle trigonométrique :

$$\cos(\pi/2+\alpha) = -\sin(\alpha) \qquad \sin(\pi/2+\alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\cos(\pi/2-\alpha) = \sin(\alpha) \qquad \sin(\pi/2-\alpha) = \cos(\alpha)$$

Les cosinus deviennent des sinus et inversement. Pour les signes, le plus simple est de repasser par le cercle trigonométrique.

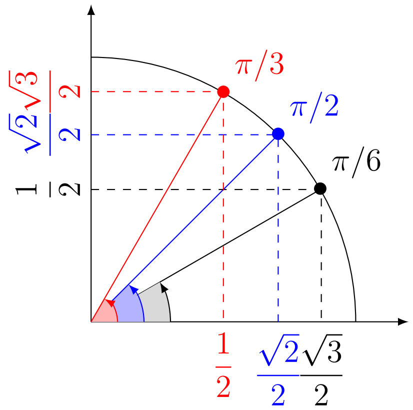



Pour la tangente, il faut repasser par la définition $\tan(\alpha) =$

$\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ pour montrer que :

$$\tan(\pi/2+\alpha) = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$$
$$\tan(\pi/2-\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

## Valeurs remarquables




## Additions et soustractions

Ces formules sont à connaitre par cœur car elles sont à la base de toutes les autres formules.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Les formules pour la tangente se démontrent à partir des sinus et cosinus.

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

Remarque : ceci permet aussi de retrouver les valeurs remarquables de rotation pour $\pi$ ou $\pi/2$.

## Formules de duplication

Ces formules sont à connaitre par cœur ou à savoir retrouver rapidement.

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\\ &= 2\cos^2(\alpha) - 1\\ &= 1 - 2\sin^2(\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\\ &= \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \quad [1]\end{aligned}$$

1. Formule rarement utile. Voir la démonstration en annexe $\cos^2(\alpha) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\alpha)}$

Ces formules sont souvent utiles pour linéariser un $\sin^2$ ou un $\cos^2$ :

$$\begin{aligned}
\cos^2(\alpha) &= \frac{\cos(2\alpha)+1}{2} \\
\sin^2(\alpha) &= \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \\
\cos(\alpha)\sin(\alpha) &= \frac{\sin(2\alpha)}{2}
\end{aligned}$$

## Formules de linéarisation

Ces formules sont à connaitre par cœur ou à savoir retrouver rapidement. Les formules de linéarisation permettent de transformer un produit de fonction trigonométrique en somme de fonction trigonométrique.

$$\begin{aligned}
\cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right) \\
\sin(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right) \\
\cos(a)\sin(b) &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\cos(a-b)\right)
\end{aligned}$$

## Formules de factorisation

Ces formules sont à connaitre par cœur ou à savoir retrouver rapidement. Les formules de factorisation permettent de transformer une somme de fonction trigonométrique en produit de fonction trigonométrique (contrairement à la linéarisation).

$$\begin{aligned}
\cos(p)+\cos(q) &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\
\cos(p)-\cos(q) &= 2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{q-p}{2} \\
&= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(p)+\sin(q) &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\
\sin(p)-\sin(q) &= 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}
\end{aligned}$$

# Annexes

## Démonstration $\tan(\pi/2 \pm \alpha) = \mp \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$

$$\begin{aligned}\tan(\pi/2 \pm \alpha) &= \frac{\sin(\pi/2 \pm \alpha)}{\cos(\pi/2 \pm \alpha)}\\ &= \frac{\cos(\alpha)}{\mp\sin(\alpha)}\\ &= \mp\frac{1}{\tan\alpha}\end{aligned}$$

## Démonstration $\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a)\tan(b)}$

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}\\ &= \frac{\sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)}\\ &= \frac{\dfrac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} \pm \dfrac{\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{1 \mp \dfrac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}\\ &= \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a)\tan(b)}\end{aligned}$$

## Démonstration $\cos^2(\alpha) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\alpha)}$

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha) &= 1 - \sin^2(\alpha)\\ &= 1 - \tan^2(\alpha)\cos^2(\alpha)\\ \cos^2(\alpha)\left(1+\tan^2(\alpha)\right) &= 1\\ \cos^2(\alpha) &= \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)}\end{aligned}$$

## Démonstration des formules de linéarisation

**Exemple pour :** $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\end{aligned}$$

On additionne les deux équations précédentes :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

d'où : $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

La démonstration est similaire pour les autres formules de linéarisation.

## Démonstration des formules de factorisation. Exemple pour $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\end{aligned}$$

On additionne les deux équations précédentes :

$$\cos{(a+b)} + \cos{(a-b)} = 2\cos{(a)}\cos{(b)}$$

On pose alors $p = a+b$ et $q = a-b$. D'où l'on tire les expressions pour $a$ et $b$ en fonction de $p$ et $q$ par addition et soustraction :

$$a = \frac{p+q}{2}$$
$$b = \frac{p-q}{2}$$

En remplaçant, nous obtenons :

$$\cos{(p)} + \cos{(q)} = 2\cos{\left(\frac{p+q}{2}\right)}\cos{(fracp-q2)}$$

La démonstration est similaire pour les autres formules de factorisation.