

Chapitre 1 : Pratiques calculatoires.

I Étude d'équations et d'inéquations

A Propriétés

Proposition 1

Les propriétés ci-dessous sont valables pour les 5 symboles "=", "≥", "≤", ">" et "<".

☞ **Transitivité** : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y) \text{ et } (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

☞ **Compatibilité avec l'addition** : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$

☞ **Compatibilité avec la multiplication** :

➤ $\forall x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}_+^*, x \leq y \Leftrightarrow x \times z \leq y \times z$

➤ $\forall x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}_-^*, x \leq y \Leftrightarrow x \times z \geq y \times z$



Remarque 1. ☞ La soustraction revient à additionner l'opposé et la division revient à multiplier par l'inverse. On a donc les mêmes propriétés pour la soustraction et la division.



Exercice 1. Résoudre les inégalités :

a) $3 \leq 2x + 9$

b) $5x - 2 \geq 8x - 5$

c) $\frac{2x}{x-1} \geq 2$ si $x > 1$.

Corolaire 2

Les propriétés ci-dessous sont valables pour les 5 symboles "=", "≥", "≤", ">" et "<".

☞ **Compatibilité avec l'addition** : $\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}, (x \leq y) \text{ et } (x' \leq y') \Rightarrow x + x' \leq y + y'$

☞ **Compatibilité avec la multiplication** : $\forall x, x', y, y' \in \mathbb{R}_+^*, (x \leq y) \text{ et } (x' \leq y') \Rightarrow x \times x' \leq y \times y'$



Remarque 2. ☞ Attention ces propriétés ne fonctionnent pas si les nombres sont négatifs où si l'on fait un quotient.



Exemple 1. ☞ Soit $x \in [0, 2]$. Encadrement des expressions :

a) $f(x) = (3x + 1)(x + 1)$

b) $g(x) = \frac{3x + 1}{x + 1}$

Interprétation graphique.



Exercice 2. Montrer que : $2 \leq x \Rightarrow 20 \leq (3x + 4)\sqrt{x + 2}$



Exercice 3. Montrer que pour $x \in [0, 3]$, on a : $2 \leq \frac{3x + 4}{\sqrt{x + 1}} \leq 13$.

Attention, vous commencerez par montrer l'encadrement :

$$4 \leq 3x + 4 \leq 13$$

Puis :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{x + 1}} \leq 1$$

Puis, vous pourrez conclure.

B Inégalité et variation de fonctions

Définition 1

Soit f une fonction définie d'un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dira que f est croissante sur I si :

$$\forall a, b \in I, a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

On dira que f est décroissante sur I si :

$$\forall a, b \in I, a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$



Remarque 3. $\Leftrightarrow$ On parle de croissance stricte (ou de décroissance stricte) si les inégalités de la définition précédente sont strictes.



Exemple 2. $\Leftrightarrow$ Étude des variations de la fonction **carré**



Exemple 3. $\Leftrightarrow$ Étude des variations de la fonction **inverse**

C Décomposition en fonctions de référence.



Méthode 1

Certaines fonctions peuvent se décomposer en fonctions de référence. Cette décomposition permettra l'étude d'inégalité.



Exemple 4. $\Leftrightarrow$ Soit la fonction f définie sur $] -\infty, \frac{1}{3}[$ par :

$$\forall x \in] -\infty, \frac{1}{3}[, f(x) = \frac{-2}{\sqrt{-3x+1}} + 3$$

Remarque : Nous aurions pu noter cette fonction :

$$\begin{array}{ccc} f & : &] -\infty, \frac{1}{3}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{-2}{\sqrt{-3x+1}} + 3 \end{array}$$

Décomposition de f en fonction de référence.

Encadrement de f sur $[-1, 0]$.



Exercice 4. Déterminer un encadrement sur $[1, 4]$ de la fonction g définie par :

$$\begin{array}{ccc} g & : & \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{-1}{(2\sqrt{x}+1)^2+1} + 1 \end{array}$$



Exercice 5. Déterminer un encadrement sur $[0, 2]$ de la fonction h définie par :

$$\begin{array}{ccc} h & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -3\sqrt{\frac{1}{2x^2+1}} + 1 \end{array}$$

D Tableaux de signes



Méthode 2

Pour étudier une inégalité un peu *complexe*, une méthode consiste :

1. Mettre tout du même côté et se retrouver à devoir faire une étude de signes.
2. Puis trouver la forme la plus factorisée possible. (sachant qu'un quotient s'étudie comme un produit)
3. Puis enfin faire un tableau de signes.



Exemple 5. $\Leftrightarrow$ Résoudre :

a) $\frac{x-2}{(2x-1)(-3x+1)} \geq 0$

b) $\frac{1}{x-1} > 3$



Exercice 6. Résoudre les inégalités :

a) $\frac{2x-1}{(x-1)(-3x-2)} \geq 0$

b) $\frac{1}{2x-1} > 3$

E Étude d'inéquation par étude de fonctions.



Méthode 3

L'étude d'une fonction après le calcul de la dérivée puis l'élaboration du tableau de variations peut permettre l'étude d'inégalité.



Exemple 6. $\Leftrightarrow$ Nous pouvons démontrer des inégalités par étude de fonction.

a) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leq x$

b) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$



Exercice 7. a) Montrez que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$. Interprétez graphiquement ce résultat.

b) Montrez que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, 2\sqrt{x} \leq x + 1$. Interprétez graphiquement ce résultat.

(On rappelle que la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.)

F Valeur absolue et distance

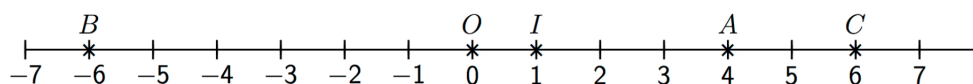
Définition 2

Considérons la droite réelle orientée :

La distance entre A et B est $AB = |b - a|$



Exercice 8. Donner les abscisses des points A, B, C, O et I puis déterminer les distances AB, BA, AC, AI et AO :



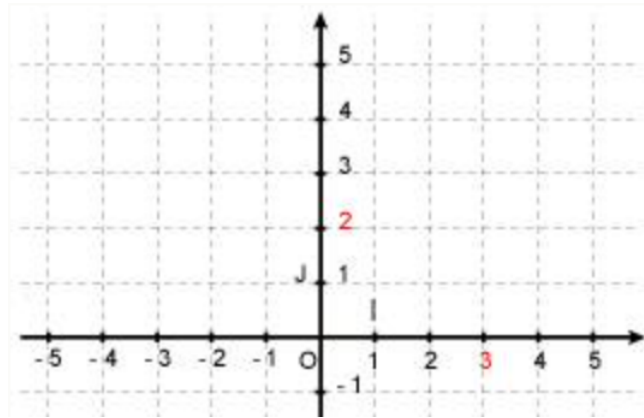
Définition 3

On définit ainsi la fonction valeur absolue comme la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$



Exercice 9. Représentez la fonction valeur absolue sur le graphique ci-dessous :

**Proposition 3**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |xy| = |x| \times |y|$$

$$\text{Inégalité triangulaire : } \forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$$



Remarque 4. Pour tous x réel, on a : $\sqrt{x^2} = |x|$. En revanche, l'on a $\sqrt{x^2} = x$ uniquement pour $x \geq 0$.



Exemple 7. Résolvons les inéquations

a) $|x| \leq 1$

b) $|x - 2| \leq 3$

c) $|x + 2| + |x| \leq 3$



Exercice 10. Résoudre les inéquations :

a) $|x| \leq 3$

b) $|x - 2| \leq 5$

c) $|x + 2| \geq 3$

II Équations, inéquations polynomiales

A Définition

Définition proposition 4

- ☞ On appelle **fonction polynomiale du second degré** (ou trinôme) toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec a , b et c des réels et $a \neq 0$. Ce sont les **coefficients** de la fonction polynomiale.

- ☞ On appelle **racine** de f tout nombre réel x tel que $f(x) = 0$.
- ☞ On appelle **discriminant** de $f(x) = ax^2 + bx + c$ le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.
- ☞ La fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Cette expression est appelée **forme canonique** de la fonction polynomiale f .
- ☞ On a alors : $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
- ☞ Variations :

Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f		$\searrow$ β $\nearrow$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f		$\nearrow$ β $\searrow$	

| ☞ *Démonstration 1.*



Exemple 8. Déterminons les éléments définis dans la proposition ci-dessus pour la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 3x - 5$$



Exercice 11. Soit la fonction polynomiale :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^2 + x \end{aligned}$$

- Déterminer les coefficients a , b et c de f .
- Déterminer une factorisation de $f(x)$.
- Déterminer une racine de f .
- Déterminer le discriminant Δ de f .
- Déterminer la forme canonique de f et en déduire un réel λ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq \lambda$$

- Déterminer le tableau de variation de f .

B Résolution d'(in)équations du second degré

Proposition 4

On considère $f(x) = ax^2 + bx + c$ et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. On distingue alors 3 cas :

☞ Si $\Delta > 0$ alors l'équation f possède 2 racines x_1 et x_2 telles que

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et f peut être factorisée sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. D'où le signe :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a

☞ Si $\Delta = 0$ alors l'équation f possède 1 unique racine x_0 appelé racine double, est :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

et f peut se factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_0)^2$. D'où le signe :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
	signe de a	0	signe de a

☞ Si $\Delta < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines complexes **conjuguées** telles que

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

et f peut être factorisée sous la forme $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

Son signe :

x	$-\infty$	$+\infty$
	signe de a	



Méthode 4

Pour étudier le signe d'un trinôme, nous commencerons par déterminer le déterminant puis les racines et enfin nous pourrions dresser le tableau de signes du trinôme.



Exemple 9. Déterminons la forme factorisée et le signe de la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 3x - 5$$



Exercice 12. Déterminer la forme factorisée et le tableau de signe des fonctions polynomiales suivantes :

a) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

b) $g(x) = x^2 - 4x + 4$

c) $h(x) = x^2 + x + 1$

C Relations entre racines et coefficients

Proposition 5

Si f est une fonction polynôme de degré 2 admettant deux racines x_1 et x_2 (c.a.d $\Delta \geq 0$ alors :

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{c}{a} \\ (x_1 + x_2) = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

 **Exercice 13.** Pour les polynômes suivants vérifier que l'une des 4 valeurs -2, -1, 1 ou 2 soient une racine et à l'aide des relations précédentes, déterminer la valeur de la deuxième racine.

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$

b) $g(x) = 2x^2 - 3x - 2$

c) $h(x) = 3x^2 + x - 2$

 **Exercice 14.** Trouver deux réels dont la somme est $\frac{11}{2}$ et le produit est 7.

D Factorisation d'un polynôme.

Proposition 6

Soit f une fonction polynômiale de degré n un entier non nul, admettant un réel a comme racine, alors il existe une fonction polynomiale g de degré $n - 1$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x - a)g(x)$$



Méthode 5

Soit f une fonction polynômiale de degré n un entier non nul, admettant un réel a comme racine. Pour trouver une factorisation de f sous la forme $f(x) = (x - a)g(x)$:

- ☞ soit l'on procédera par *identification* en développant $(x - a)g(x)$
- ☞ soit l'on procédera par division *euclidienne de polynôme*.

Nous illustrons ces deux méthodes dans l'exemple ci-dessous.



Exemple 10. ☞ Factorisation de :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 + x^2 + x - 3 \end{aligned}$$

 **Exercice 15.** Nous allons étudier le signe de :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

1. Vérifier que $x_0 = \frac{1}{2}$ est bien une racine de f .
2. En déduire une factorisation de f sous la forme $(2x - 1)g(x)$ où g est un polynôme de degré 3 que l'on déterminera.
3. On considère le polynôme $x^3 - x^2 - x - 2$. Montrer que ce polynôme peut se factoriser sous la forme $(x - 2)h(x)$ où h est un trinôme que l'on déterminera.
4. Étudier le signe de f .