TP1 | Introduction aux TPs

À propos de la mesure

Nom et prénom : ....

Nom et prénom du/des binôme/s : ....

....

Notions abordées		Questions	Évaluation
Rea Com	Utiliser un langage informatique pour traiter et présenter des données statistiques.	1 à 5	
Com	Présenter le résultat d’une mesure avec son incertitude-type ou élargie.	6	
Rea	Estimer une incertitude de type A.	7 à 9	
Rea	Estimer une incertitude de type B.	10	
Rea	Évaluer l’incertitude-type d’une grandeur s’exprimant en fonction d’autres grandeurs dont les incertitudes-types sont connues.	11 & 12	
Val	Comparer des mesures dont les incertitudes sont connues à l’aide de l’écart normalisé.	13	

Remarques générales :

Salle : optique

Paillasse professeur

- ☐ Ruban adhésif
- ☐ Papiers millimétrés
- ☐ feuilles blanches
- ☐ Ciseaux
- ☐ Documentation technique de l'ohmmètre [x1]

Liste du matériel pour les élèves — 11 postes

- ☐ Banc optique
- ☐ Lentille : $f' = 12{,}5\,\mathrm{cm} \Leftrightarrow V = 8\delta$ [x1]
- ☐ Objet dépoli (F, P ou Q avec papier calque) [x1]
- ☐ Source de lumière blanche [x1]
- ☐ Écran de projection [x1]
- ☐ Ohmmètre [x1]
- ☐ Résistance $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ [x1]
- ☐ Ordinateur

Introduction

Les sciences physiques sont des sciences **expérimentales**. Il est donc nécessaire de quantifier des données à l'aide de mesures. Mesurer des grandeurs est une activité fondamentale en sciences, tant dans les laboratoires de recherche que dans l'industrie. Connaître la valeur d'une grandeur est alors tout aussi important que savoir la précision avec laquelle on la connaît.

Il n'existe **pas de mesure parfaite**. En effet, la valeur vraie d'une grandeur est inaccessible par la mesure, car celle-ci ne peut pas être parfaite tant en raison de fluctuations diverses que de la précision intrinsèque des instruments de mesure.

La notion d'incertitude sert à estimer avec quelle précision nous effectuons une mesure. Elle est donc essentielle dans la démarche expérimentale et scientifique. Sans elle, on ne peut pas juger de la qualité d'une mesure, de sa pertinence ou de sa compatibilité avec une loi scientifique ou avec d'autres mesures indépendantes.

Par exemple : imaginons une expérience dont l'objectif est de mesurer l'accélération de la pesanteur terrestre, dont la valeur conventionnelle est $g = 9{,}806\,65\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Voici les résultats obtenus par deux binômes : $g_1 = (10 \pm 2)\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ et $g_2 = (10{,}2 \pm 0{,}5)\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

1 Quelle est la meilleure mesure ? Justifier.

espace élève

Tout résultat de mesure doit donc être associé à une incertitude. L'objectif de ce TP est de fournir un ensemble de ***règles de bonne pratique*** de l'estimation de l'incertitude.

Dans la majorité des cas, pour évaluer l'incertitude sur une mesure, deux méthodes sont possibles :

- **si l'on peut réaliser plusieurs fois la mesure dans les mêmes conditions, et que les résultats varient d'une mesure à l'autre** : on fait une étude statistique des résultats. On obtient alors une **incertitude de type A**.
- **si l'on ne peut réaliser la mesure qu'une seule fois, ou que plusieurs mesures donnent le même résultat** : on doit utiliser toutes les informations possibles concernant les instruments de mesure et le protocole expérimental pour estimer l'incertitude. On obtient alors une **incertitude de type B**.

1 Estimer l'incertitude d'une grandeur fluctuante : incertitude de type A

1.1 Données statistiques sur une série de mesures

La première situation correspond au cas où lorsque nous faisons La mesure d'une grandeur x, celle-ci donne à chaque fois pour le même protocole une valeur différente notée x_i.

Prenons un exemple : supposons que nous souhaitons mesurer le temps t que met une balle pour toucher le sol lorsque nous la lâchons de 1 m.

Sur une série de 10 mesures, nous avons les résultats suivants :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	0,497	0,542	0,288	0,486	0,438	0,430	0,427	0,477	0,404	0,487

Une autre façon de représenter une série de mesures est de tracer son histogramme. Ouvrez le programme python fourni : "chute_TP1-incertitudes.ipynb"

(2) Tracer l'histogramme des valeurs.
Indiquer à quoi servent les options : range=(0.25, 0.6) et bins=10.

espace élève

Afin de caractériser une série de mesures, plutôt que d'utiliser toutes les valeurs ou l'histogramme, nous pouvons utiliser deux nombres statistiques : la valeur moyenne et l'écart-type.

La moyenne nous renseigne sur la valeur sur laquelle est centrée la série de mesures. Comment calculer la moyenne ?

$$\bar{x} = < x > = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

où n est le nombre total de mesures faites.

L'écart-type nous indique comment les valeurs sont réparties autour de cette moyenne. Comment calculer l'écart-type ?

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

3 À l'aide du programme python fourni et des formules précédentes, calculer la moyenne et l'écart type. Quelle valeur trouvez-vous ?

espace élève

Tester les fonction : np.mean(t) puis np.std(t, ddof=1).

4 Quelles fonctions *numpy* nous permettent de calculer la moyenne et l'écart-type d'une série de mesure ?

espace élève

1.2 Incertitude sur la moyenne

Nous avons vu comment caractériser la moyenne et la distribution d'une série. Cependant, ce que nous souhaitons connaitre c'est l'incertitude sur la valeur moyenne, et non pas l'incertitude sur la série.

Pour cela, il faudrait faire k série de n mesures, calculer la moyenne pour chaque série, et en déduire la dispersion sur la moyenne...

Cependant, on se rend vite compte que cela devient vite irréalisable... il faudrait faire un nombre beaucoup trop important de mesure.

Mais heureusement, nous possédons une formule pour le calculer :

$$u(x) = \overline{\sigma_x} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

5 À l'aide de python, pour les données de l'experience précédente sur la chute d'une balle, déterminer l'incertitude-type $u(t)$.

espace élève

1.3 Présentation du résultat

Le résultat d'une mesure doit donc faire apparaitre la valeur moyenne **et** l'incertitude-type.

Ainsi nous venons d'expliquer qu'une valeur sans son incertitude n'a pas de sens. Comment devons nous présenter le résultat ?

Nous savons que le résultat se trouve avec « de grandes chances » dans l'intervalle $x - u(x)$ et $x + u(x)$. Mais que signifie avoir « de grandes chances » ? Sans entrer dans les détails, si la valeur est distribuée autour d'une distribution gaussienne (ce qui est le cas de la plupart des phénomènes naturels), il y 68 % de chance que le résultat se trouve dans cet intervalle.

Dans la pratique, nous préférons utiliser les incertitudes élargies $\Delta x = 2u(x)$ plutôt que l'incertitude-type. En effet, il y 95 % de chance que la valeur vraie appartiennent à l'intervalle $[x - \Delta x; x + \Delta x]$.

Nous reviendrons dans la partie 4 sur les incertitudes élargies.

Nous n'avons pas répondu à la question de savoir comment présenter un résultat. Prenons un exemple pour plus de clarté. Nous avons calculé la moyenne d'une grandeur x, qui pour notre exemple est une longueur : $\overline{x} = 4{,}765\,916$ cm. Nous avons estimé l'incertitude élargie $\Delta x = 0{,}4317$ cm.

Quel est le résultat ? Nous pourrions être tentés d'écrire :

$$x = \overline{x} \pm \quad \Delta x$$
$$x = 4,765916 \pm \quad 0,4317\text{cm}$$ ⚠ ne pas oublier l'unité

Alors dans ce cas, quel sens ont les derniers termes des décimales ? Aucun, nous ne gardons qu'un seul chiffre significatif pour l'incertitude, arrondie au supérieur :

$$x = \overline{x} \quad \pm \Delta x$$
$$x = 4,765916 \quad \pm 0,5\text{cm}$$

Mais alors quel sens donner aux chiffres de la moyenne ? Notamment, ceux après la première décimale puisque l'on sait que nous ne sommes précis qu'à une décimale près. Nous faisons la même approximation : nous arrondissons à une décimale :

$$\begin{aligned} x &= \overline{x} \pm && \Delta x \\ x &= 4,8 \pm && 0,5\text{cm} \end{aligned}$$

En résumé : si la mesure indique : $\overline{x} = 4{,}765\,916$ cm et $\Delta x = 0{,}4317$ cm, alors nous retenons comme résultat :

$$x = 4,8 \pm 0,5\text{cm}$$

À retenir

Pour exprimer un résultat, nous utilisons l'incertitude-type $u(x)$ (accord à 68 %) ou l'incertitude élargie Δx (accord à 95 %). Le résultat s'écrit avec un chiffre significatif sur l'incertitude-type ou l'incertitude élargie. Le dernier chiffre significatif sur la moyenne correspond à la même décimal que celui sur l'incertitude. Le résultat se présente sous la forme :

$$x = \overline{x} \pm u(x)$$

ou

$$x = \overline{x} \pm \Delta x$$

Vous avez tout bien compris ? Petit test !

6 Pour les exemples suivants, indique le résultat retenu.

1 - Longueur d'onde de la raie verte du mercure : $\lambda = 546{,}1$ nm et $u(\lambda) = 3{,}17$ nm.
2 - Temps de chute d'une bille dans un liquide visqueux : $\Delta t = 4{,}73$ s et $u(\Delta t) = 0{,}62$ s.
3 - Volume équivalent d'un titrage : $V_E = 14$ mL, $u(V_E) = 0{,}22$ mL.

espace élève

1.4 À vous de jouer

Jusqu'ici nous vous avons fourni les données des expériences. À votre tour de relever vos données.

L'expérience que vous allez réaliser est la projection d'un objet sur un écran au travers d'une lentille convergente de focale $f' = 15\,\text{cm}$.

Sur le banc optique, placer l'objet, puis la lentille à une distance de $20\,\text{cm}$. Déplacer l'écran afin de trouver l'image nette. Recommencer l'opération une dizaine de fois.

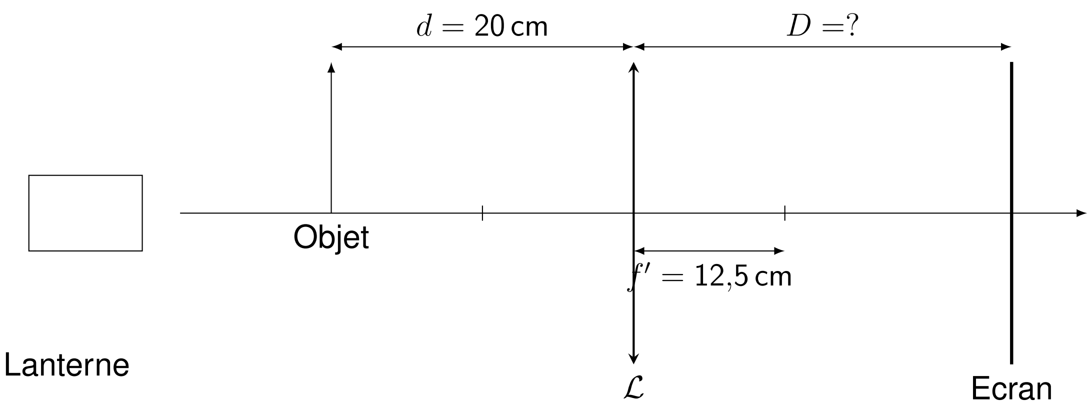

FIGURE 1 – Projection d'un objet sur un écran au travers d'une lentille convergente.

7 Noter vos résultats sur votre compte-rendu. Aide : faite un tableau pour présenter vos données.

espace élève

8 Déterminer la moyenne, l'écart-type ainsi que l'incertitude-type de vos mesures. Aide : utiliser python peut-être une bonne idée.

espace élève

Inscrivez vos résultats aux tableaux.

9 Comparer votre incertitude-type, avec la moyenne des incertitudes de la classe. Commenter.

espace élève

2 Estimer l'incertitude d'une grandeur qui ne varie visiblement pas : incertitude de type B

Il existe des mesures pour lesquelles la mesure ne permet pas d'observer de variabilité. Est-ce que cela signifie que la mesure est infiniment précise ?

Cela provient du fait que la grandeur ne varie pas de manière absolue lors de l'expérience (ex. mesure de la longueur d'un objet solide, la table par exemple) ou alors que l'instrument de mesure possède une précision de mesure supérieure à la variabilité de la grandeur. Un autre cas est si l'expérience n'est réalisable qu'une seule fois (ex. destruction du produit mesuré).

Quoi qu'il en soit, il faut retenir que ce n'est pas parce que la mesure ne varie qu'il n'y a pas d'incertitude : **il y a toujours une incertitude sur une mesure**. Nous parlons d'incertitude de **type B**.

2.1 Estimer l'incertitude de type B

Il faut faire preuve de bon sens pour estimer l'incertitude. Prenons un exemple pour mieux comprendre. Mesurons la largeur l d'une feuille (celle de ce TP par exemple) avec une règle graduée en centimètre (voir figure 2).

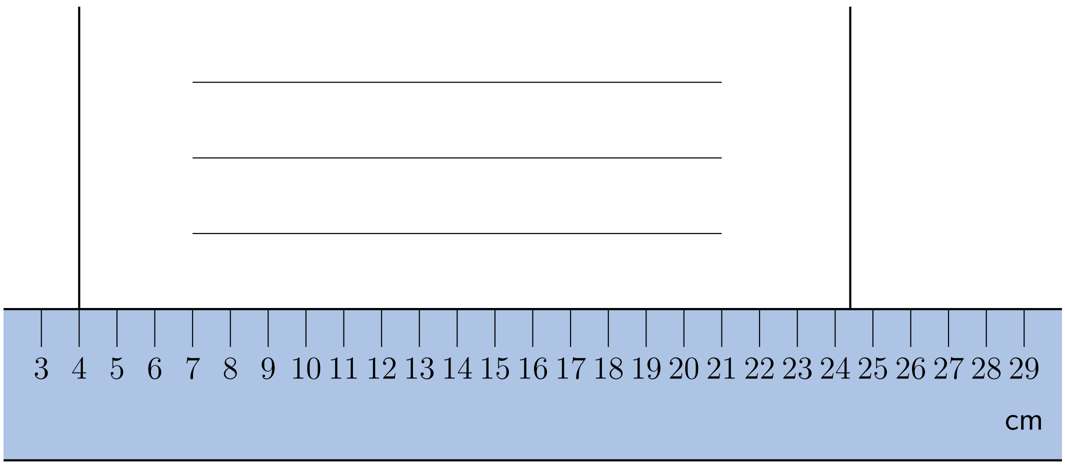

FIGURE 2 – Mesure de la largeur d'une feuille à l'aide d'une règle centimétrique.

La largeur de la feuille se situe avec certitude dans l'intervalle $[20; 21]$ cm, et probablement à une valeur de $l_0 = 20{,}5\,\text{cm}$.

Donc la valeur vraie se trouve dans l'intervalle : $[l_0 - \varepsilon; l_0 + \varepsilon]$ où $\varepsilon = 0{,}5\,\text{cm}$. ε est le demi-intervalle d'incertitude de la valeur mesurée.

Pour obtenir l'incertitude, nous admettons (la justification est hors programme et n'apporte pas beaucoup d'intérêts pour nos mesures) que l'incertitude vaut :

$$u(l) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

D'où dans l'exemple de la mesure de la largeur de la feuille :

$$l = 20.5 \pm 0.3\text{cm}$$

À retenir

Il s'agit d'une incertitude de type B, car elle n'a pas été évaluée par une méthode statistique. Il y a 68 % de chances que la valeur vraie de x soit comprise dans l'intervalle $[x_0 - u(x); x_0 + u(x)]$.

2.2 À vous de jouer

Nous souhaitons mesurer la résistance d'un résistor avec un ohmmètre.
Vous avez à votre disposition : un ohmètre et un resistor.

(10) Donner la valeur de la résistance. N'oubliez-pas les incertitudes. Décrivez comment vous les avez estimées.

espace élève

3 Estimer l'incertitude sur une grandeur calculée

3.1 Utiliser des formules de composition d'incertitude

Nous avons vu dans les deux dernières parties comment estimer l'incertitude pour une grandeur qui varie pour chaque expérience (incertitude de type-A) puis comment estimer l'incertitude pour une grandeur qui ne semble pas varier d'une expérience à l'autre (incertitude de type-B). Le problème est réglé, nous savons estimer tout type d'incertitude.

Afin presque. Certaines grandeurs ne sont pas accessibles directement et il faut les calculer.

Par exemple, pour la chute de la balle, si nous souhaitons connaitre sa vitesse moyenne lors de la chute, aucun instrument ne peut nous la fournir. Pour avoir cette information, il faut la calculer à l'aide de la formule :

$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

Nous avons mesuré la hauteur de chute : $h = 1,0 \pm 0,1$m et d'après nos calculs dans la partie 1 $\Delta t = 0,45 \pm 0,02$s.

Que vaut la vitesse moyenne ?

$$v = \frac{h}{\Delta t} = 2{,}2222\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Mais nous n'avons pas d'incertitude sur cette vitesse.
Pour l'obtenir, nous allons utiliser des formules (à connaitre par cœur ♡) :

À retenir

Multiplication par une constante	$x = \lambda y$ ($\lambda \in \mathbf{R}$)	$u(x) = \lvert\lambda\rvert u(y)$
Somme ou différence	$x = y + z$ ou $x = y - z$	$u(x) = \sqrt{u(y)^2 + u(z)^2}$
Produit ou quotient	$x = y \times z$ ou $x = \frac{y}{z}$	$\frac{u(x)}{x} = \sqrt{\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 + \left(\frac{u(z)}{z}\right)^2}$
Puissance [1]	$x = y^p$	$\frac{u(x)}{x} = \lvert p\rvert \frac{u(y)}{y}$

(11) Détermine la valeur moyenne et l'incertitude sur la vitesse moyenne de chute de la balle. Détaillez vos calculs.

espace élève

3.2 Utiliser une simulation numérique : méthode de Monte-Carlo

Dans certains cas, aucune des formules de composition ne nous permet d'obtenir l'incertitude sur la grandeur calculée. Pour palier à ce problème, nous allons utiliser une simulation numérique.

L'objectif est de simuler un grand nombre d'expériences N en faisant varier les valeurs dans leur intervalle de confiance. Pour chaque expérience, nous pouvons calculer la valeur

1. Officiellement pas au programme, mais formule bien utile notamment pour les racines carrées. ⚠ elle ne peut pas se déduire de la formule de multiplication comme on s'y attendrait. En effet, les variables y et z doivent être indépendantes, ce qui n'est pas le cas ici.

de la grandeur calculée. Le calcul de la moyenne de la grandeur calculée, puis de l'écart-type nous permettent de déterminer l'incertitude-type sur cette grandeur.

Reprenons l'exemple sur la vitesse moyenne de la balle. Ouvrez le programme jupyter fourni "TP1-incertitudes.ipynb".

Suivez les instructions dans le fichier pour réaliser votre simulation numérique de 10 000 tirages.

(12) Déterminer la valeur moyenne puis l'incertitude à partir d'une méthode de Monte-Carlo.

espace élève

3.3 À vous de jouer : détermination de la focale d'une lentille

Dans la partie 1.4, vous avez déterminé D la position entre la lentille et l'écran pour obenir une image nette d'un objet situé à 20 cm.

À l'aide de la formule de conjugaison de *Descartes* :

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f'}$$

Réaliser une simulation de Monte-Carlo permettant de déterminer la focale f' ainsi que l'incertitude. Avant de commencer, à votre avis, quelle est l'incertitude sur d ?

espace élève

4 Comparaison de deux résultats : écart normalisé

4.1 Définition

Comment comparer deux valeurs possédant une incertitude ? Nous utilisons l'écart normalisé [2]

Soit deux mesures x_1 et x_2 avec leurs incertitudes associées : $u(x_1)$ et $u(x_2)$.

Nous définissons alors l'écart normalisé (noté EN, aussi appelé z-score) ainsi :

$$EN = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

Comment interpréter l'écart normalisé ?

En général, nous retenons qu'il faut que $EN \leq 2$ pour que les deux valeurs x_1 et x_2 soient compatibles.

Mais il est préférable de savoir interpréter la formule de l'EN. Regardons les différents cas possibles :

- Si $x_1 = x_2$ alors $EN = 0$. Les deux valeurs sont parfaitement compatibles, peu importe leurs incertitudes.
- Si $x_1 \neq x_2$ posons $y = x_1 - x_2$. n a alors $u(u) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}$ d'après les formules de compositions vues précédement.

  $$EN = \frac{|y|}{u(y)}$$

  Ainsi, l'écart normalisé calcule l'incertitude relative sur la différence des deux valeurs mesurées.

  Donc regarder si $EN \leq 2$ revient à regarder si $y \pm 2u(y)$ contient 0 dans son intervalle de confiance. Autrement dit, si la différence $y = x_1 - x_2$ est compatible avec 0... logique.

Pour illustrer cela, imaginons trois situations distinctes :

- La mesure $x_1 = 3,0 \pm 0,5$ et la mesure $x_2 = 5,0 \pm 0,5$ (prises sans unités pour simplifier). Alors $y = 2$ et $u(y) = \sqrt{2 \times 0,5^2} = 0,7$. Ainsi $y = 2 \pm 0,7$. Est-ce compatible avec 0 ? Non pour un écart-type. Et pour deux écarts-types ? $f = 2 \pm 1,4$, non compatible avec 0. Que nous dit l'écart-normalisé ? $EN = y/u(y) = 2/0,7 = 2,8 > 2$ les mesures ne sont pas compatibles... où plutôt sont compatibles à trois écarts-types près car $EN < 3$.
- La mesure $x_1 = 3,5 \pm 0,5$ et la mesure $x_2 = 4,5 \pm 0,5$ (prises sans unités pour simplifier). Alors $y = 1$ et $u(y) = \sqrt{2 \times 0,5^2} = 0,7$. Ainsi $y = 1 \pm 0,7$. Est-ce compatible avec 0 ? Non pour un écart-type. Et pour deux écarts-types ? $y = 1 \pm 1,4$. Cette fois ci, les mesures sont compatibles avec 0 à deux écarts-types. Que nous dit l'écart-normalisé ? $EN = f/u(f) = 1/0,7 = 1,4 < 2$ les mesures sont compatibles... où plutôt sont compatibles à deux écarts-types près car $EN < 2$.
- La mesure $x_1 = 3,0 \pm 2$ et la mesure $x_2 = 5,0 \pm 2$ (prises sans unités pour simplifier). Alors $f = 2$ et $u(f) = \sqrt{2 \times 2^2} = 2,8$. Ainsi $f = 2 \pm 2,8$. Est-ce compatible avec 0 ? Oui, pour un écart-type. Que nous dit l'écart-normalisé ? $EN = f/u(f) = 2/2.8 = 0,7 < 1$ les mesures sont compatibles... où plutôt sont compatibles à un écart-type près car $EN < 1$.

2. Il existe d'autres méthodes de comparaison, mais c'est l'unique au programme.

Mais que signifie "compatibles à n écarts-type près". Nous avons vu qu'entre le cas 1 et 3 les valeurs "deviennent" compatibles.

Cela vient du fait que les incertitudes ont été grandement surestimées dans l'expérience 3 et non pas forcément que les mesures sont meilleures. Contrairement au cas 2. Il ne faut ainsi pas confondre compatibilité et qualité de la mesure.

En résumé, l'EN donne le nombre d'incertitudes-type séparant $|x_1 - x_2|$ de 0. Si EN est "trop grand"[3] les valeurs ne peux pas être considérées comme compatibles.

Remarque : la notion de "trop grand" reste flou. Par exemple, en physique des particules, il suffit d'avoir un $EN < 5$ pour "valider" la découverte d'une nouvelle particule.

4.2 À toi de jouer

Reprenons l'expérience sur la mesure de la position de l'écran pour obtenir une image nette (voir partie 1.4).

Vous avez mesuré dans la partie 1.4 la distance D à laquelle se forme l'image de la lentille ainsi que son incertitude. Nous pouvons en déduire la focale de la lentille

Dans la partie 3.3 vous avez calculé la valeur de la focale de la lentille f'_{calc} ainsi que son incertitude $u(f'_{\text{calc}})$.

Comparons la valeur que vous avez trouvé avec la valeur donnée par le constructeur : $f'_{\text{cons}} = (15{,}0 \pm 0{,}1)\,\text{cm}$.

13 Comparer, à l'aide de l'écart normalisé, la valeur de la focale calculée avec la valeur donnée par le constructeur. Commenter.

espace élève

3. Si EN < 1 il y a 68 % de chance que 0 soit dans l'intervalle $f \pm u(f)$.
Si EN < 2 il y a 95 % de chance que 0 soit dans l'intervalle $f \pm 2u(f)$.
Si EN < 3 il y a 99 % de chance que 0 soit dans l'intervalle $f \pm 3u(f)$.
Si EN > 3, il y a moins d'un pourcent de chance de trouver 0 dans l'intervalle $f \pm 3u(f)$.