

Chapitre 2 : sommes et récurrences.

I Sommes et produits

A Notations.

Définition 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles ou complexes et m et n deux entiers tel que $m \leq n$ alors :

$$\sum_{k=m}^n u_k = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n$$

$$\prod_{k=m}^n u_k = u_m \times u_{m+1} \times \cdots \times u_n$$

Soit n un entier naturel. On note $n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times \dots \times n$. Cette expression se lit « factorielle n ».

On pose $0! = 1$



Exemple 1. Déterminons : $3!$ et $4!$.



Exercice 1. Déterminer les valeurs suivantes où $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $6!$

b) $\frac{6!}{2! \times 4!}$

c) $\frac{(n+1)!}{n!}$



Exemple 2. ☞

- ☞ Les sommes des 10 premiers entiers naturels et des n premiers entiers naturels (avec $n \in \mathbb{N}^*$) sont :
- ☞ Les produits des 10 premiers entiers naturels non nul et des n premiers entiers naturels non nuls (avec $n \in \mathbb{N}^*$) sont :
- ☞ Le produit des n premiers entiers naturels impairs (avec $n \in \mathbb{N}$)

Proposition 1

Soit n et m deux entiers tel que $n < m$. Alors :

$$(n+1)! = (n+1) \times n! \quad \text{ou} \quad n! = n \times (n-1)! \quad \text{et} \quad \frac{m!}{n!} = m \times (m-1) \times \cdots \times (m-n+1)$$



Exemple 3. Calculons les sommes $A = \sum_{k=1}^4 (k+3)$, $B = \sum_{k=1}^3 (-k^2 + 2k - 1)$ et $C = \sum_{k=2}^4 (64 - k^3)$.



Exercice 2. Détermine la valeur des sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^4 (3k-1)$.

2. $\sum_{k=1}^5 k^2$.

3. $\sum_{k=1}^4 (3k^2 - 1)$.

4. $\sum_{k=1}^2 (2k^2 - 2k + 1)$.



Exercice 3. Détermine la valeur des sommes suivantes pour $n = 2$ et $n = 3$:

1. $\sum_{k=1}^n (3k-1).$

2. $\sum_{k=1}^{2n-1} k^2.$

3. $\sum_{k=1}^{3n-2} (3k^2-1).$

4. $\sum_{k=1}^{n-1} (k^2-k+1).$

 **Exercice 4.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire les expressions suivantes en utilisant le signe $\sum$:

1. $3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{13}$

2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{10}{1024}$ (on remarquera que $2^{10} = 1024$)

3. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n}$

4. $x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{9} + \frac{x^8}{27} + \dots + \frac{x^{\dots}}{3^n}$

 **Exercice 5.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Écrire le produit des n premiers entiers naturels pairs non nuls en utilisant le symbole $\prod$.
2. Écrire la somme des n premiers entiers naturels pairs non nuls en utilisant le symbole $\sum$.
3. Écrire le produit des n premiers entiers naturels multiples de 3 non nuls en utilisant le symbole $\prod$.
4. Écrire la somme des n premiers entiers naturels pairs non nuls multiples de 3 en utilisant le symbole $\sum$.

B Factorisation et développement

Proposition 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs réelles ou complexes et m et n deux entiers tel que $m \leq n$ et λ et μ deux réels ou complexes, alors :

$$\sum_{k=m}^n \lambda u_k = \lambda \sum_{k=m}^n u_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=m}^n (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=m}^n u_k + \mu \sum_{k=m}^n v_k$$



Exemple 4. Nous allons simplifier les expressions suivantes où n est un entier naturel non nul :

a) $\sum_{k=1}^5 (2k-3).$

b) $\sum_{k=1}^4 3k^2.$

c) $\sum_{k=1}^4 (k-1)^2.$

d) $\sum_{k=1}^n (2k^2-2k+1).$

e) Sommes des n premiers entiers paires.

f) Sommes des n termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n+1$

 **Exercice 6.** On note $\alpha_n = \sum_{k=0}^n k$, $\beta_n = \sum_{k=0}^n k^2$ et $\gamma_n = \sum_{k=0}^n k^3$. Exprimer en fonction de α_n , β_n , γ_n et n les expressions suivantes :

a) $\sum_{k=0}^n 3k^2 + 5k + 1$

b) $\sum_{k=0}^n (2k+1)^2$

c) $\sum_{k=0}^n (k-3)^3$

C Changement d'indice

Il peut être parfois judicieux de décaler l'indice, notamment pour pouvoir simplifier des expressions



Exemple 5. Modifions les sommes ci-dessous de sorte que l'indice initial commence à 0.

1. $\sum_{k=3}^7 (2k-3).$

2. $\sum_{k=2}^5 (k^2-1).$

3. $\sum_{k=1}^n (3k^2-1).$

4. $\sum_{k=2}^{2n+3} (2k^2-2k+1).$

 **Exercice 7.** Compléter :

1. $\sum_{k=3}^7 (2k-3) = \sum_{\ell=1}^{\dots} \dots$

2. $\sum_{k=4}^6 ((k-1)^2+2) = \sum_{\ell=0}^{\dots} \dots$

3. $\sum_{k=3}^n (-k^2+1) = \sum_{\ell=1}^{\dots} \dots$

4. $\sum_{k=1}^{2n+1} (k-k^3+1) = \sum_{\ell=0}^{\dots} \dots$

 **Exercice 8.** $\sum_{k=1}^n (n+1-k)$. Nous posons $\ell = (n+1-k)$



Méthode-exemple 1

1. On exprime le nouvel indice en fonction de l'ancien puis inversement.
2. On détermine les nouvelles bornes et l'expression à sommer en fonction du nouvel indice.

Un exemple :

Pour pouvoir simplifier des sommes entres elles ou retrouver des sommes connues, il peut être utile de changer d'indice. Voici une méthode qui fonctionne très adaptée lors des premiers pas sur les sommes et que nous appliquerons pour changer l'indice de la somme :

$$S = \sum_{k=3}^{n+2} (k^2 + 3k - 1)$$

Nous souhaitons commencer la sommes à l'indice 0.

1. Comme l'indice k commence à 3 nous poserons comme nouvel indice $\ell = k - 3$ (pour commencer à 1 nous aurions posé $\ell = k - 2$).
2. Nous avons donc $k = \ell + 3$
3. Dés lors si $k = n + 2$ (l'indice maximal de k) nous avons $\ell = k - 3 = n + 2 - 3 = n - 1$
4. Notre somme sera donc de la forme $\sum_{\ell=0}^{n-1} \dots$
5. Enfin, il ne reste plus qu'à remplacer dans la somme initiale :

$$S = \sum_{k=3}^{n+2} (k^2 + 3k - 1) = \sum_{\ell=0}^{n-1} ((\ell+3)^2 + 3(\ell+3) - 1) = \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell^2 + 9\ell + 17)$$



Exemple 6. a) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $\sum_{k=3}^n (u_{k+1} - u_k) =$

 **Exercice 9.** a) $\sum_{k=5}^{2n+1} k = \sum_{\ell=0}^{\dots} \dots$

- b) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n - 5$. Exprimer $\sum_{k=3}^n u_k$ en fonction de n et d'une somme dont l'indice commence à 0.

D Télescopage

Proposition 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles ou complexes et m et n deux entiers tel que $m \leq n$, alors :

$$\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$$

|  Démonstration 1. $\Leftrightarrow$



Méthode 2

La méthode par télescopage consiste à :

1. Reconnaître une expression de la forme $u_{k+1} - u_k$ et l'expression de u_k
2. Puis à appliquer la formule précédente.



Exemple 7. Calcul de la somme :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$



Exercice 10. Simplifier les expressions :

a) $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$

b) $\sum_{k=1}^n k \times k!$

(Indications : pour le a) mettre sous le même dénominateur et utiliser $\ln \left(\frac{a}{b} \right) = \ln a - \ln b$. Pour le b) remarquer que $k \times k! = (k+1)! - k!$)

E Identités remarquables

Proposition 4

Si $x, y \in \mathbb{R}^2$ (ou $x, y \in \mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$x^n - y^n = (x - y) (x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}) = \sum$$

|  Démonstration 2.



Exemple 8. Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factorisons les expressions $a^2 - b^2$, $a^5 - b^5$, $27x^3 - 1$



Exercice 11. Utiliser la formule précédente pour factoriser les expressions : $A_n = x^n - 3^n$ et $B_n = x^n - 1$.

II Sommes et premières récurrences

A Formule de récurrence pour les sommes



Méthode 3

Si l'on définit une somme sous la forme :

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$$

Alors l'on obtient la formule de récurrence :

$$S_{n+1} = S_n + f(n+1)$$



Exemple 9. Déterminons la formule de récurrence pour les sommes suivantes :

(a) $A_n = \sum_{k=1}^n (3k+1)$

(b) $B_n = \sum_{k=1}^n (k^2 + 3k + n)$

(c) $C_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{2k+1}$



Exercice 12. Déterminer la formule de récurrence pour les sommes suivantes :

(a) $D_n = \sum_{k=1}^n (1-4k)$

(b) $E_n = \sum_{k=1}^n \left(k + \frac{1}{k}\right)^2$

(c) $F_n = \sum_{k=1}^{2n-1} (k-1)$

B Principe de récurrence pour les sommes.



Méthode 4 (Rédaction)

Pour mettre en place un principe de récurrence de manière claire et précise, il faut :

- Énoncer clairement la proposition P_n à démontrer qui doit dépendre d'un paramètre n entier naturel.
- Démontrer cette proposition pour le paramètre n_0 *initial* (souvent 0 ou 1).
- Démontrer l'hérédité, c'est à dire $P_n \Rightarrow P_{n+1}$
- Rédiger la conclusion : « On a donc montré que P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$. »



Exemple 10. A l'aide du principe de récurrence, montrer les propriétés suivantes :

1. $P_n : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour $n \geq 0$

2. $Q_n : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour $n \geq 0$



Exercice 13. Montrez par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$



Exercice 14. Montrez par récurrence que Formule fausse à revoir!!! :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3 = 4n^4 - n^2$$

 **Exercice 15.** Soit $q \in \mathbb{R}^*$, montrez par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n kq^k = \frac{q}{(q-1)^2} (nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1)$$

C Sommes de référence

Proposition 5

Les sommes de puissance des n premiers entiers naturels :

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

|  **Démonstration 3.** $\Leftrightarrow$

 **Exemple 11.** Calculons les expressions suivantes :

a) $\sum_{k=0}^n (-2k+3)$

b) $\sum_{k=1}^n (3-k)^2$

c) $\sum_{k=0}^n (k^2+n)k$

 **Exercice 16.** Calculer les expressions suivantes :

a) $\sum_{k=0}^n (3k+1)$

b) $\sum_{k=1}^n (k^2-2k+1)$

c) $\sum_{k=0}^n (k+1)k^2$

D Coefficients binomiaux

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On note $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Par convention, si $k < 0$ ou $k > n$ on pose $\binom{n}{k} = 0$.

L'expression $\binom{n}{k}$ se lit « k parmi n » et est appelé un **coefficient binomial** (la raison viendra plus tard).

 **Exemple 12.** a) $\binom{5}{2}$ b) $\binom{5}{6}$ c) $\binom{n}{0}$

 **Exercice 17.** Déterminer les valeurs de :

a) $\binom{5}{3}$

c) $\binom{n}{n}$

e) $\binom{n}{n-1}$

b) $\binom{8}{5}$

d) $\binom{n}{1}$

f) $\binom{n}{2}$

Proposition 6 (Propriétés des "coefficients binomiaux".)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a les propriétés :

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ (ici $k < n$, cette formule est la formule de Pascal)
- $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}$ (Ici $k > 0$, 12^{ième} formule du traité de Pascal)

|  Démonstration 4.

**Méthode-exemple 5** (calcul des coefficients binomiaux)

On sera amenés à calculer des coefficients binomiaux "à la main".

- Retenir les formules du cours : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, "miroir", et $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$
- Savoir construire le triangle de Pascal (et connaître la formule de Pascal)
- Connaître les formules :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \dots \times 1}$$

Pour déterminer $\binom{10}{4}$:

$$\binom{10}{4} = \frac{\overbrace{10 \times 9 \times 8 \times 7}^{4 \text{ facteurs}}}{\underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{4 \text{ facteurs}}} \underbrace{=}_{\text{Simplifier !!!}} = \frac{10 \times 3 \times 7}{1} = 210$$



Exercice 18. Déterminer les valeurs de :

a) $\binom{5}{0}$

c) $\binom{5}{2}$

e) $\binom{6}{4}$

b) $\binom{5}{1}$

d) $\binom{6}{2}$

f) $\binom{8}{5}$

E Formule du binôme**Proposition 7**

Soient a et b deux réels et n un entiers naturel ;

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$$

**Méthode 6**

Savoir développer une expression du type $(a + b)^n$.



Exemple 13. $\Rightarrow$ Développement par le binôme de Newton des expressions :

$$\Leftrightarrow A = (2x - 1)^3$$

$$\Leftrightarrow B = (5x - 2)^n$$



Exercice 19. $\Rightarrow$ Développer par le binôme de Newton les expressions :

$$\Leftrightarrow A = (1 - 3x)^3$$

$$\Leftrightarrow B = (i - 2)^4$$

F Algorithmique

**Algorithmie 7**

Pour le calcul d'une somme de la forme :

$$\sum_{k=m}^n f(k)$$

Avec par exemple :

$$\sum_{k=1}^{10} k^2$$

```

1 def f(k):
2     return k**2
3
4 def som(m,n):
5     somme=0
6     for i in range(m,n+1):
7         somme=somme+f(k)
8     return somme
9
10 print(som(1,10))

```

**Algorithmie 8**

Algorithme récursif de calcul par formule de Pascal de coefficient binomiaux.

```

1 def bino(k,n):
2     if k<0 or k>n:
3         return 0
4     elif k==0 or k==n:
5         return 1
6     else:
7         return bino(k-1,n-1)+bino(k,n-1)

```


**Algorithmie 9**

Utilisation de la formule de pascal pour trouver tous les coefficient binomiaux au rang $n \in \mathbb{N}^*$.

```
1 def coefbin(n):
2     L=[0 for i in range(10)] for k in range(10)]
3     if n==0:
4         return L
5     else:
6         L[n][0]=1
7         L[n][n]=1
8         for i in range(1,n):
9             L[n][i]=coefbin(n-1)[n-1][i-1]+coefbin(n-1)[n-1][i]
10    return L
11
12 def bino(n):
13    return coefbin(n)[n]
14
15 def binom(n):
16    L=[0 for i in range(n+1)]
17    for i in range(n+1):
18        G=[]
19        for i in range(len(L)):
20            G.append(L[i])
21        G[0]=1
22        G[i]=1
23        for j in range(1,i):
24            G[j]=L[j-1]+L[j]
25        L=[]
26        for i in range(len(G)):
27            L.append(G[i])
28    return L
```