

Chapitre 2 : TD sommes et récurrences.

Exercice 1. Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les sommes suivantes :

a) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$

c) $a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}$

e) $a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$

b) $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$

d) $1 + x + x^2 + \cdots + x^k$

f) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \frac{x^{2n}}{2n}$

Exercice 2. Calculer les sommes suivantes :

a) $A = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2$

b) $B = \sum_{k=0}^n (k^2 + 2n + 4)$

c) $C = \sum_{k=0}^n 3^{2k}$

Exercice 3. Calculer les sommes suivantes :

a) $A = \sum_{k=0}^n (k+1)^2 - k^2$

b) $B = \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{k+1} \right)$

(Par télescopage et en développant)

c) $C = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$

Exercice 4. Montrer que :

$$\forall n \geq 0, \sum_{k=1}^n (2k+1)(k-1) = \frac{n(n-1)(4n+7)}{6}$$

Exercice 5. Résoudre l'équation $3\binom{n}{3} = 2\binom{n}{2}$, d'inconnu $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. À l'aide de la formule du binôme, développer $(1+\sqrt{3})^4$ et $(1-\sqrt{3})^4$. En déduire que $(1+\sqrt{3})^4 + (1-\sqrt{3})^4$ est un entier.

Exercice 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$$

Où $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ représente l'arrondi à l'entier inférieur de $\frac{n}{2}$.

Calculer $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$. En déduire S_n et T_n .

Exercice 8. Calculer les sommes suivantes :

$$\text{a) } \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} 4^k 5^{7-k} \quad \text{b) } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k \quad \text{c) } \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k \quad \text{d) } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{5^k} \binom{n}{k} \quad \text{e) } \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$$

1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$$

2. En déduire la valeur de S_n .

Exercice 10. Pour $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n k a^k$.

1. Calculer S_n lorsque $a = 1$

2. On suppose que $a \neq 1$. Calculer $aS_n - S_n$ à l'aide d'un télescopage et en déduire la valeur de S_n

Exercice 11. Calculer la somme $\sum_{k=1}^n (-1)^k k$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ (on pourra distinguer les cas où n est pair ou n impair).

Exercice 12. Calculer les produits suivants :

$$\text{a) } \prod_{k=1}^n 2^k \quad \text{b) } \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad \text{c) } \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \quad \text{d) } \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{k-j}$$

Exercice 13. Calculer les produits suivants $P_n = \prod_{k=1}^n (2k)$ et $P'_n = \prod_{k=0}^n (2k+1)$ à l'aide de factorielles.