

Automatisme du 5 septembre 2024

Exercice 1

Résoudre les inégalités ci-dessous :

$$\text{a) } \frac{1-2x}{(x-3)(2x-3)} \leq 0$$

$$\text{b) } \frac{x}{x+2} \geq 1$$

$$\text{a) } \frac{1-2x}{(x-3)(2x-3)} \leq 0$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3	$+\infty$
$x-3$		$-$	$-$	0	$+$
$1-2x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$2x-3$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x-2}{(1-2x)(x-1)}$	$+$	0	$-$	$+$	$-$

Donc $S = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\cup [3, +\infty[$.

$$\text{b) } \frac{x}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-x-2}{x+2} = \frac{-2}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow x < -2$$

Donc $S =]-\infty, -2[$.

Exercice 2

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer un encadrement sur l'intervalle I proposé, ainsi que leur variation sur cet intervalle :

$$1. f(x) = -2x^2 + 1 \text{ sur } I = [1, 2].$$

$$\begin{array}{ccc}
 1 \leq a \leq b \leq 2 & \underbrace{\Leftrightarrow}_{x \mapsto x^2 \text{ croissante sur } [0, +\infty[} & 1 \leq a^2 \leq b^2 \leq 4 \\
 & \underbrace{\Leftrightarrow}_{x \mapsto -2x+1 \text{ croissante sur } [0, +\infty[} & -1 \geq -2a^2 + 1 \geq -2b^2 + 1 \geq -11 \\
 & \underbrace{\Leftrightarrow}_{x \mapsto -2x+1 \text{ croissante sur } [0, +\infty[} & -1 \geq f(a) \geq f(b) \geq -11
 \end{array}$$

La fonction f est donc décroissante et $\forall x \in [1, 2], f(x) \in [-11, -1]$.

$$2. g(x) = \frac{-2}{\sqrt{3x^2+1}} + 2 \text{ sur } I = [0, 1]$$

$$\begin{array}{lcl}
0 \leq a \leq b \leq 1 & \underbrace{\Leftrightarrow}_{x \mapsto x^2 \text{ croissante sur } [0, +\infty[} & 0 \leq a^2 \leq b^2 \leq 1 \\
& \underbrace{\Leftrightarrow}_{x \mapsto 3x+1 \text{ croissante sur } \mathbb{R}} & 1 \leq 3a^2 + 1 \leq 3b^2 + 1 \leq 4 \\
& \underbrace{\Leftrightarrow}_{x \mapsto \sqrt{x} \text{ croissante sur } \mathbb{R}^+} & 1 \leq \sqrt{3a^2 + 1} \leq \sqrt{3b^2 + 1} \leq 2 \\
& \underbrace{\Leftrightarrow}_{x \mapsto \frac{1}{x} \text{ décroissante sur } \mathbb{R}_+^*} & 1 \geq \frac{1}{\sqrt{3a^2 + 1}} \geq \frac{1}{\sqrt{3b^2 + 1}} \geq \frac{1}{2} \\
& \underbrace{\Leftrightarrow}_{x \mapsto -2x+2 \text{ décroissante sur } \mathbb{R}} & 0 \leq \frac{-2}{\sqrt{3a^2 + 1}} + 2 \leq \frac{-2}{\sqrt{3b^2 + 1}} + 2 \leq 1 \\
& & \Leftrightarrow 0 \leq g(a) \leq g(b) \leq 1
\end{array}$$

Donc si $x \in [0, 1]$ alors $g(x) \in [0, 1]$ et la fonction g est croissante sur cet intervalle. (On dira de $[0, 1]$ est stable par g ou g -stable.)

Exercice 3

Résoudre les inégalités ci-dessous :

a) $|x - 3| < 7$

$$|x - 3| < 7 \Leftrightarrow -7 < x - 3 < 7 \Leftrightarrow -4 < x < 10$$

b) $|3x - 1| > 2$

$$|3x - 1| > 2 \Leftrightarrow (3x - 1 > 2) \text{ ou } (3x - 1 < -2) \Leftrightarrow (x > 1) \text{ ou } (x < \frac{-1}{3})$$

Donc $S =]-\infty, \frac{-1}{3}[\cup]1, +\infty[$.

c) $|x - 2| + |x - 1| > 3$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$ x - 2 $	$2 - x$	$2 - x$	$x - 2$	
$ x - 1 $	$1 - x$	$x - 1$	$x - 1$	

☞ Si $x \leq 1$, alors :

$$|x - 2| + |x - 1| > 3 \Leftrightarrow 2 - x + 1 - x > 3 \Leftrightarrow 0 > 2x \Leftrightarrow 0 > x$$

☞ Si $x \in [1, 2]$, alors :

$$|x - 2| + |x - 1| > 3 \Leftrightarrow 2 - x + x - 1 > 3 \Leftrightarrow 1 > 3$$

Donc pas de solution dans ce cas.

☞ Si $x \geq 2$, alors :

$$|x - 2| + |x - 1| > 4 \Leftrightarrow x - 2 + x - 1 > 3 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$$

Donc l'ensemble solution est $S =]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$.

Exercice 4

Pour la fonction polynomiale $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ déterminer les racines, la forme factorisée, le tableau de signes, le tableau variation et forme canonique. Faites une représentation approximative et rapide sur $[-2; 4]$.

☞ Le discriminant est : $\Delta = 16 > 0$. Donc f a deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-2-4}{-2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+4}{-2} = -1$$

☞ On en déduit la forme factorisée est : $f(x) = -(x-3)(x+1)$

☞ Et le tableau de signes puisque $a = -1 < 0$:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

☞ On détermine la forme canonique $\alpha = \frac{-2}{-2} = 1$ et $\beta = f(\alpha) = 4$ d'où : $f(x) = -(x-1)^2 + 4$

☞ Enfin le tableau de variations :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$-\infty$	4	$-\infty$

Exercice 5

1. Montrer l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x-1} \geq x$

Vous pourrez commencer par faire l'étude de la fonction $f(x) = e^{x-1} - x$ sur $\mathbb{R}$.

(On rappelle que $(e^u)' = u'e^u$ où u est une fonction)

☞ $f'(x) = e^{x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geq 1 = e^0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

☞ D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	0	$-\infty$

☞ On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0 \Rightarrow e^{x-1} \geq x$.

☞ On peut interpréter ce résultat par le fait que la représentation graphique de $x \mapsto e^{x-1}$ est au dessus de la droite d'équation $y = x$ (on pourra remarquer que cette droite est tangente en 1 à la courbe représentative de $x \mapsto e^{x-1}$.)

2. (Bonus) Montrer les inégalités :

$$\forall x \in]-\infty, 1], e^{x-1} \leq \frac{x^2 + 1}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in [1, +\infty[, e^{x-1} \geq \frac{x^2 + 1}{2}$$

Interpréter graphiquement le résultats précédent.

- ☞ On étudiera cette fois la fonction $g : x \mapsto e^{x-1} - \frac{x^2 + 1}{2}$
- ☞ $g'(x) = e^{x-1} - x = f(x) \geq 0$ voir question précédente.
- ☞ D'où le tableau de variation de g en remarquant que $g(1) = 0$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	
g	$-\infty$	0	$+\infty$

- ☞ Donc $\forall x \in]-\infty, 1], \quad g(x) \leq 0 \Rightarrow e^{x-1} \leq \frac{x^2 + 1}{2}$
- ☞ Et $\forall x \in [1, +\infty[, \quad g(x) \geq 0 \Rightarrow e^{x-1} \geq \frac{x^2 + 1}{2}$
- ☞ On peut interpréter ce résultat par le fait que la représentation graphique de $x \mapsto e^{x-1}$ est au dessus de la parabole d'équation $y = \frac{x^2 + 1}{2}$ pour les abscisses $x \geq 1$ et en dessous pour les abscisses $x \leq 1$.