

Chapitre 3 : géométrie plane.

Dans ce chapitre $\mathcal{P}$ sera un plan et $\vec{\mathcal{P}}$ sera le plan vectoriel associé. C'est-à-dire qu'à deux points A et B de $\mathcal{P}$, on lui associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ caractérisé par :

☞ **Sa direction** : celle de la droite (AB)

☞ **Son sens** : de A vers B

☞ **Sa longueur** : AB

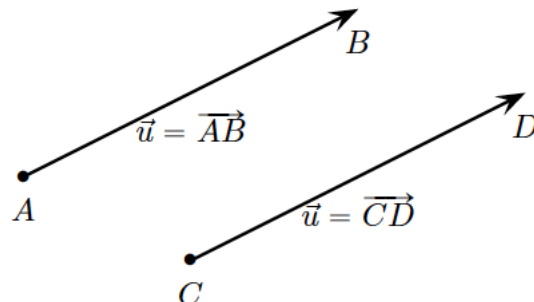
Dés lors nous remarquons que si C et D sont deux points de $\mathcal{P}$ vérifiant :

☞ $(AB) // (CD)$

☞ les "segments" $[AB]$ et $[CD]$ sont orientés dans le même sens

☞ $AB = CD$

C'est-à-dire ce qui est équivalent, si $ABDC$ est un parallélogramme. Alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux représentants du **même** vecteur.



I Généralités

A Multiplication d'un vecteur par un réel

Étant donné un vecteur $\vec{u}$ et un réel λ , on définit le vecteur $\lambda\vec{u}$ comme suit :

☞ $\lambda\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$.

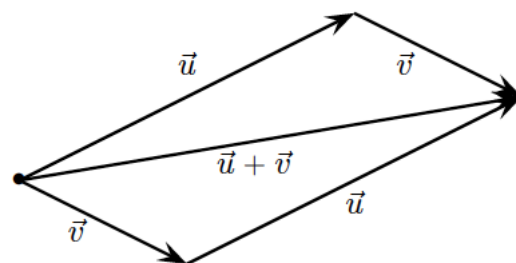
☞ $\lambda\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $\lambda \geq 0$ et un sens opposé à $\vec{u}$ si $\lambda < 0$.

☞ $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$.



B Somme de deux vecteurs

Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on définit le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ par la "règle" du parallélogramme comme l'illustre la figure suivante :



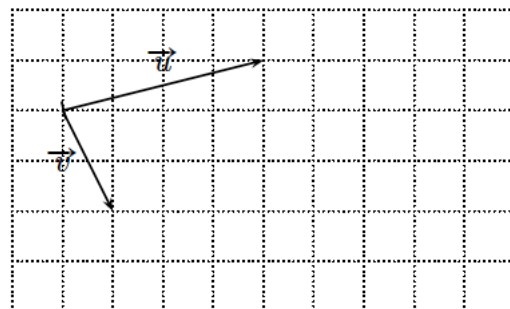
Exercice 1. .

Sur le graphique ci-contre, construire les vecteurs :

$$\vec{w} = 2\vec{v} + \frac{3}{2}\vec{u}$$

$$\vec{w} = -\vec{u} + \vec{v}$$

$$\vec{w} = -\vec{u} + 2\vec{v}$$



C Propriétés algébriques

On dispose donc de deux opérations sur l'ensemble $\vec{\mathcal{P}}$ des vecteurs du plan, l'addition de deux vecteurs qui donne un vecteur et la multiplication par un réel d'un vecteur qui donne un vecteur. Pour ces raisons, on dit que $+$ est une **opération interne** pour l'addition de vecteurs et que la multiplication d'un réel par un vecteur (notée $\cdot$ mais souvent omise comme au début du paragraphe) est une **opération externe**.

Proposition 1

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$ et λ et μ deux réels. On a les propriétés suivantes :

- | | |
|---|---|
| ☞ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativité) | ☞ $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ |
| ☞ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (Associativité) | ☞ $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$. |
| ☞ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (Élément neutre) | ☞ $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$. |
| ☞ $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (Existence d'un opposé) | ☞ $1\vec{u} = \vec{u}$. |



Remarque 1. On résume toutes ces propriétés en disant que $(\vec{\mathcal{P}}, +, \cdot)$ est un **$\mathbb{R}$ -espace vectoriel**.



Exercice 2. On considère les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{P}}$.
Simplifier les expressions vectorielles suivantes :

- | | |
|---|---|
| a) $\vec{\alpha} = (\vec{u} + \vec{v}) - 5(\vec{u} - 2\vec{w})$ | c) $\vec{\gamma} = 3\left(\frac{1}{2}\vec{u} - 3(\vec{v} + 7(2\vec{u} - \vec{w}))\right)$ |
| b) $\vec{\beta} = (\vec{u} - 3\vec{v}) + 7(2\vec{u} - \vec{w})$ | d) $\vec{\delta} = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{5}\vec{v}\right) + \frac{1}{3}(2\vec{u} - \vec{v})$ |



Exercice 3. On considère les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{P}}$.
Ces trois vecteurs vérifient l'équation $(\vec{u} + \vec{v}) - 5(\vec{u} - 2\vec{w}) = \vec{0}$. Exprimer $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

D Colinéarité, famille libre et famille liée

Définition 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$.

- ☞ Soient λ et μ deux réels. L'expression $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ est appelée combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. (On peut généraliser cette définition à n vecteurs)
- ☞ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. La famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ sera dite liée, si

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0} \quad \text{et} \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

- ☞ La famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ sera dite libre si elle n'est pas liée. C'est-à-dire :

- ☞ Nous pouvons généraliser les définitions précédentes à une famille de n vecteurs.



Attention 1. Une famille est un n -uplet composé de n vecteurs.



Remarque 2. On peut généraliser cette définition à n vecteurs.



Exemple 1. Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ une famille de vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. Soient $\vec{e}_1 = 2\vec{u} + 3\vec{v}$, $\vec{e}_2 = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{e}_3 = \vec{u} - \vec{v}$. Montrons que la famille $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est liée.



Remarque 3. Dans un plan toute famille de plus de 3 vecteurs est liée.



Exemple 2. Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ une famille libre de vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. Soient $\vec{e}_1 = 4\vec{u} - 3\vec{v}$ et $\vec{e}_2 = 2\vec{u} - \vec{v}$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est libre.



Exercice 4. Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ une famille libre de vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. Soient $\vec{e}_1 = \vec{u} + 3\vec{v}$ et $\vec{e}_2 = \vec{u} - \vec{v}$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est libre.

Définition 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seront dit colinéaires si : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$

Proposition 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. Alors :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est liée} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont même direction}$$

| *Démonstration 1.*



Méthode 1

Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ est libre, on montrera :

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0 \text{ et } \mu = 0$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.



Méthode 2

Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ est liée, on montrera :

☞ Soit

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0} \quad \text{et} \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

☞ Soit que :

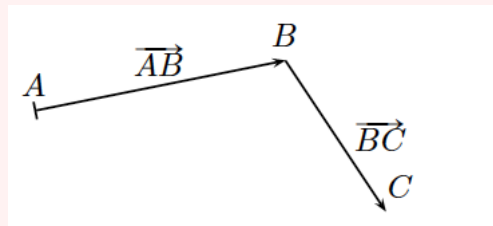
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} = \lambda \vec{v} \text{ ou } \vec{v} = \lambda \vec{u}$$

E Vecteurs et configurations.

Proposition 3

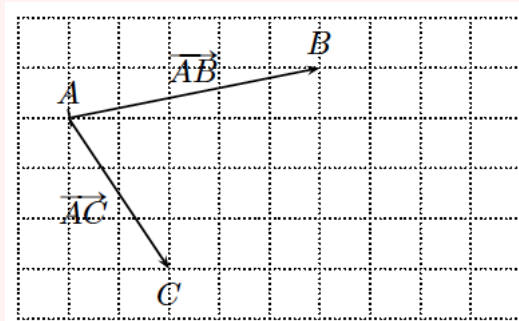
Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C de l'espace on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Règle du parallélogramme

Soit A, B et C trois points distincts. La somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$, où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.



Exemple 3. Soit ABC un triangle et E, F et G tels que :

$$\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB} \quad ; \quad 3\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

Construisons les points E, F et G et démontrons que $\overrightarrow{EC} = 4\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BF}$



Méthode 3

Pour montrer que 3 points A, B et C sont alignés, l'on montrera par exemple que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (où ce qui est équivalent que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une famille liée)



Exercice 5. Soit ABC un triangle.

- Placer les points H, G, I et J tels que : $\overrightarrow{AH} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} = \vec{0}$.
- Écrire le vecteur $\overrightarrow{AG}$ sous la forme d'une combinaison linéaire. (c.a.d sous la forme $\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$. Dès lors (λ, μ) seront les coordonnées de G dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$)
- Faire de même pour I et J .



Exercice 6. Soit ABC un triangle et E et F tel que :

$$\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad 3\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$$

Démontrer que $\overrightarrow{EC} = 4\overrightarrow{BF}$

II Bases et repère

A Bases et coordonnées cartésiennes

Définition proposition 3

☞ Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une **famille libre** de vecteurs de $\mathcal{P}$. Alors :

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{P}, \exists! (x, y) \in \mathbb{R}^2, \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

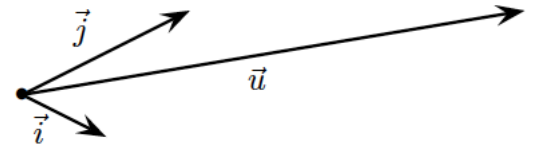
☞ On dit alors que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une **famille génératrice** de $\mathcal{P}$ puisque tout vecteur de $\mathcal{P}$ peut être *généralisé* (c'est-à-dire *s'écrire comme combinaison linéaire de*) par $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

☞ Puisque $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une famille **libre et génératrice**, elle sera appelée une **base** de $\mathcal{P}$.

☞ Le couple (x, y) souvent noté $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (en colonne) pour les vecteurs sera appelé les **coordonnées cartésiennes** de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{P}$.

☞ Si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux alors la base $\mathcal{B}$ est dite **orthogonale**, si de plus ces deux vecteurs sont de norme 1 alors $\mathcal{B}$ est dite **orthonormée** (ou **orthonormale**)

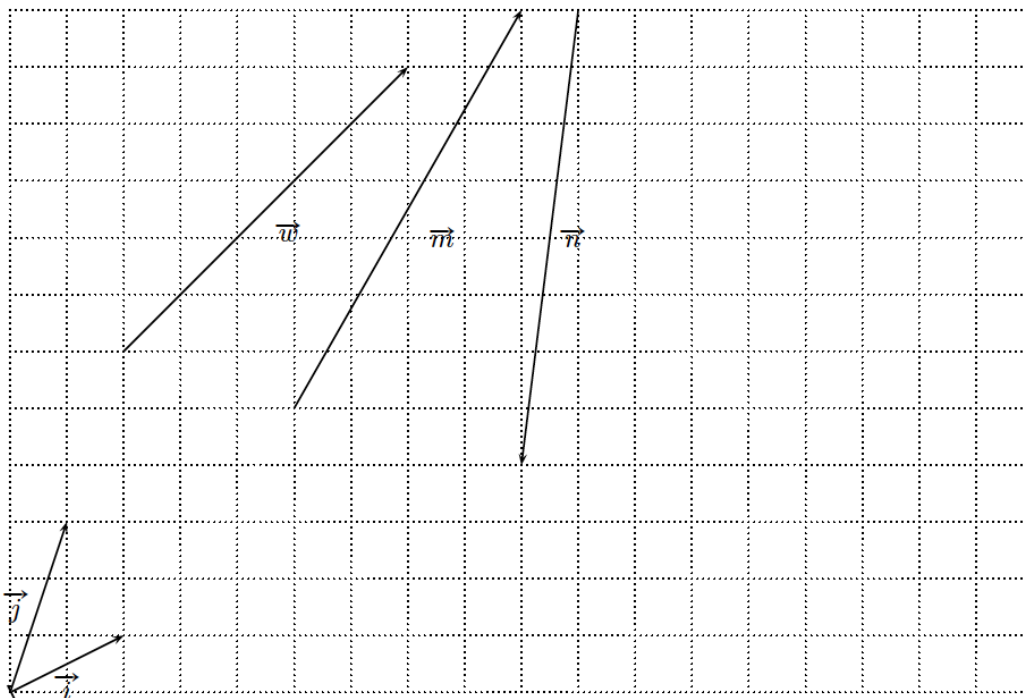
☞ Si enfin la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{j})$ est positif la base est dite **directe** (elle sera dite **indirecte** sinon)



Remarque 4. On s'autorisera à noter $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, sachant que ce type d'extravagance (un vecteur égale à un couple de nombre!!!) n'est quasiment jamais autorisée en maths.



Exercice 7. On considère la figure ci dessous où $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base :



1. Expliquer pourquoi $\mathcal{B}$ est une base du plan.
2. Construire sur cette figure un représentant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. Donner les coordonnées de $\vec{w}$, $\vec{m}$ et $\vec{n}$ représenté sur la figure précédente.
4. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{m} + \vec{n}$ et $\vec{w} + \vec{m} + 2\vec{n}$.



Méthode 4

Pour déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'un vecteur $\vec{w}$ dans une base $(\vec{u}, \vec{v})$, il suffit de trouver l'expression $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Proposition 4

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
On a :

$$\Leftrightarrow \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \lambda \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}.$$



Exemple 4. Exemple de calculs sur les coordonnées dans une base



Exercice 8. On considère le plan $\vec{\mathcal{P}}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ (c'est-à-dire que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forme une famille libre et génératrice).

On considère $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\vec{\mathcal{P}}$.
2. On définit $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer les coordonnées de $3\vec{w}$.

B Changement de base.



Méthode 5

Puisqu'il existe une infinité de bases possibles pour $\vec{\mathcal{P}}$, il est nécessaire de savoir passer des coordonnées dans une base aux coordonnées dans une autres base.



Exercice 9. On considère le plan $\vec{\mathcal{P}}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ (c'est-à-dire que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forme une famille libre ou ne sont pas colinéaires).

On considère $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

1. Justifier que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\vec{\mathcal{P}}$.

2. On a $\vec{w}$ et $\vec{n}$ ont pour coordonnées respectivement $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ et $\vec{n}$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. On a $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ ont pour coordonnées respectivement $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

C Géométrie repérée

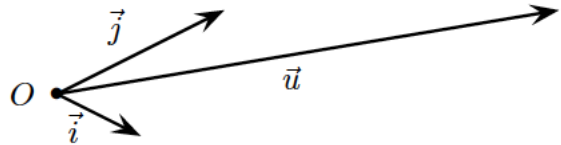
Définition proposition 4

Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une famille libre de vecteurs de $\mathcal{P}$ et O un point de $\mathcal{P}$. Alors :

$$\forall M \in \mathcal{P}, \exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Alors $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan $\mathcal{P}$. Le couple (x, y) est constitué des coordonnées cartésiennes du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

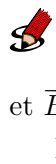
Si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux alors le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit **orthogonal**, si de plus ces deux vecteurs sont de norme 1 alors $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit **orthonormé** (ou **orthonormal**) si enfin la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{j})$ est positif le repère est dit **direct** (elle sera dite **indirect** sinon)



 **Exercice 10.** Soit ABC un triangle quelconque. Soit D et E tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AC}$.

1. Expliquer pourquoi $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est une base du plan vectoriel.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DC}$ dans la base $\mathcal{B}$
3. Montrer que la famille $(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{DC})$ est liée.

 **Exercice 11.** Soit ABC un triangle quelconque. Soit R, S et T tels que $\overrightarrow{AR} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Montrer que R, S et T sont alignés.

 **Exercice 12.** Soit A, B et C trois points du plan. On définit M et N par les relations vectorielles $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Montrer que $M = N$.

Proposition 5

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$ tel que dans ce repère, on ait $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$. On a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } I \text{ milieu de } [AB], I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

 **Exercice 13.** Dans un repère, on donne les points $A(10; -1)$, $B(12, 2)$, $C(18, -2)$ et $D(16; -5)$. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Définition proposition 5

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$. Soit d la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (c'est que $\vec{u}$ est un vecteur non nul de même direction que d). Alors :

$$M(x, y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

On obtient alors la **représentation paramétrique** de d :

$$d : \begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

 *Démonstration 2.* Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$. Soit d la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (c'est que $\vec{u}$ est un vecteur non nul de même direction que d). Alors :

$M(x, y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = ta + x_A \\ y = tb + y_A \end{cases}$$

On obtient alors la **représentation paramétrique** de d : $\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

**Méthode 6**

-  Savoir déterminer une représentation paramétrique d'une droite donnée par deux points ou un point et un vecteur directeur.
-  Savoir reconnaître les éléments caractéristiques d'une droite donnée par sa représentation paramétrique.



Exercice 14. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.

1. Déterminer un point A et un vecteur directeur de la droite d de représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = -t + 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Donner la représentation paramétrique de la droite Δ passant par $B(3, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer l'intersection entre d et Δ .