

Chapitre 3 : complément sur les barycentres.

Dans ce chapitre $\mathcal{P}$ sera un plan et $\vec{\mathcal{P}}$ sera le plan vectoriel associé. C'est-à-dire qu'à deux points A et B de $\mathcal{P}$, on lui associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ caractérisé par :

A Premiers exemples.

 **Exercice 1.**

1. On considère un triangle ABC du plan. On définit les points G , H et I définis par les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

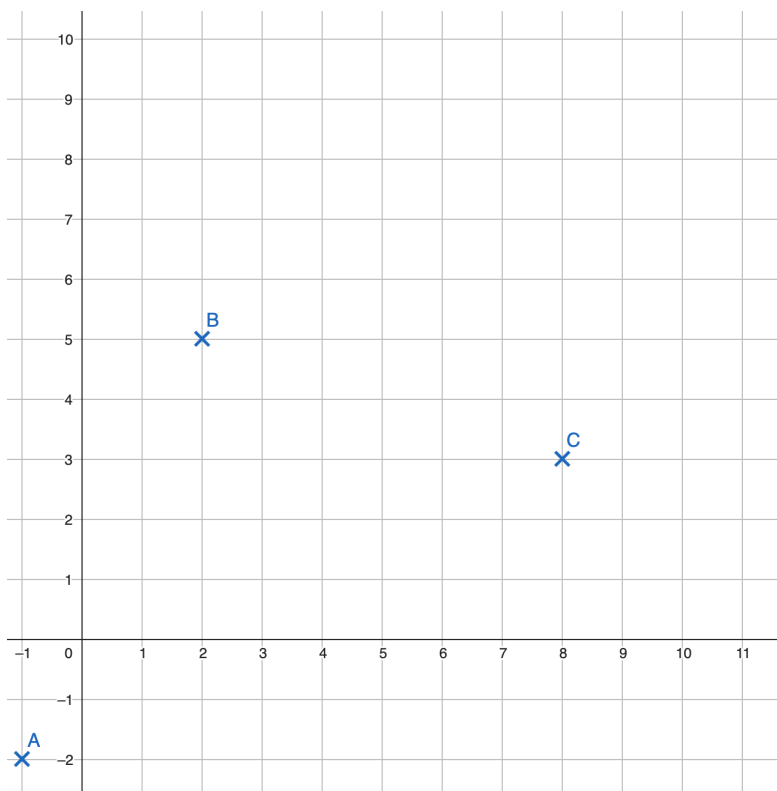
$$-\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$$

Déterminer les coordonnées des points I , G et H dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et construire les points I , G et H , sur la figure ci-contre :

2. Dans cette question le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et dans ce repère, on donne les coordonnées des trois points $A(-1, -2)$, $B(2, 5)$ et $C(8, 3)$.

- (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ et en déduire les coordonnées de I dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- (b) Procéder de la même façon pour les points G et H .



B Définition

Définition proposition 1

Soient $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{P}^n$ et $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. Alors : $\exists ! G \in \mathcal{P}, \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. G est appelé le **barycentre du système de points pondérés** $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$. Et si les α_i sont égaux on parle alors d'**isobarycentre**.

|  **Démonstration 1.**

 **Exemple 1.**  Soit ABC un triangle (le centre de gravité d'un triangle est l'isobarycentre de ce triangle)
 Soit $[AB]$ un segment, construisons le barycentre du système $\{(A, 2), (B, 1)\}$

 **Exercice 2.** Soit $[AB]$ un segment.

Construire les barycentres C , D et E des systèmes de points pondérés respectivement $\{(A, 3), (B, 1)\}$, $\{(A, 1), (B, -2)\}$ et $\{(A, -1), (B, 1)\}$.



Remarque 1. Dans l'exercice précédent, le segment $[AB]$ peut être la modélisation d'un règle à laquelle on aurait accroché un poids de 3kg à une extrémité A et de 1kg à l'autre extrémité B . Le point C serait alors le point d'équilibre.



Exercice 3. On considère un triangle ABC . Construire les barycentres

a) E associé à $\{(A, 2), (B, 1), (C, 1)\}$

b) F associé à $\{(A, -1), (B, 1), (C, 1)\}$

C Déterminer le barycentre

Proposition 1

Soient $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{P}^n$ et $(\alpha)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$.

Si G est le barycentre de $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$, alors pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)} \left(\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right)$$

| *Démonstration 2.*



Méthode 1

Déterminer les coordonnées d'un barycentre.



Exemple 2. On considère trois points $A(2, 1)$, $B(1, 3)$ et $C(5, 5)$ du plan. Construire les barycentres et déterminer leur coordonnées.

a) E associé à $\{(A, 2), (B, 1), (C, 1)\}$

b) F associé à $\{(A, -1), (B, 1), (C, 1)\}$

c) Montrer que les points A , E et F sont alignés.

Proposition 2

Si A , B et C sont trois points non alignés du plan. Tout point du plan peut s'écrire comme système barycentrique de ces trois points.

| *Démonstration 3.*



Exemple 3. On considère trois points $A(2, 1)$, $B(1, 3)$, $C(5, 5)$ du plan.

Soit $D(4, 7)$, $E(3, 4)$ et $F(7, 11)$.

1. Déterminons trois systèmes de points pondérés permettant d'obtenir D , E et F comme barycentre de ces trois points.

2. Montrer que les droites (ED) et (CF) sont parallèles.