

Automatisme du 12 septembre 2024

Exercice 1

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n 3k(k-2) = \frac{n(n+1)(2n-5)}{2},,$
2. Rappeler les valeurs de $\sum_{k=0}^n k$, puis $\sum_{k=0}^n k^2$ et enfin $\sum_{k=0}^n k^3$.
3. Retrouver le résultat précédent de la question 1 en utilisant les valeurs rappelées à la question 2.
4. Soit $n \geq 2$. Effectuer un changement d'indice pour compléter les égalités ci-dessous puis en déduire leur valeur :
 - (a) $\sum_{k=2}^n (k-2)^2 = \sum_{\ell=0}^{\dots} \dots$
 - (b) $\sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 1) = \sum_{\ell=0}^{\dots} \dots$

Exercice 2

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{2}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2k + 1}.$
2. Utiliser un télescopage pour simplifier $\sum_{k=1}^n \frac{2}{4k^2 - 1}$. (On pourra poser $u_k = \frac{1}{2k - 1}$.)

Exercice 3

On considère le plan $\vec{\mathcal{D}}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$

On considère $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

1. Justifier que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\vec{\mathcal{D}}$.
2. On a $\vec{w}$ et $\vec{n}$ on pour coordonnées respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ et $\vec{n}$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. On a $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ on pour coordonnées respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 4

Soit ABC un triangle quelconque du plan. Soit D et E tels que $\vec{AD} = \frac{1}{5}\vec{AB}$ et $\vec{CE} = 4\vec{AC}$.

1. Expliquer pourquoi $\mathcal{B} = (\vec{AB}; \vec{AC})$ est une base du plan vectoriel.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{BE}$ et $\vec{DC}$ dans la base $\mathcal{B}$
3. Montrer que la famille $(\vec{BE}; \vec{DC})$ est liée.

Réponse de l'exercice 1

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n 3k(k-2) = \frac{n(n+1)(2n-5)}{2}$

☞ On note $\mathcal{P}(n)$: " $\sum_{k=0}^n 3k(k-2) = \frac{n(n+1)(2n-5)}{2}$,"

☞ **Initialisation** : Pour $n = 0$:

$$\square \sum_{k=0}^0 3k(k-2) = 3 \times 0 \times (0-2) = 0.$$

$$\square \frac{0 \times (0+1) \times (2 \times 0 - 5)}{2} = 0$$

$\square$ Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

☞ **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} 3k(k-2) &= \sum_{k=0}^n 3k(k-2) + 3(n+1)(n+1-2) \\ &= \frac{n(n+1)(2n-5)}{2} + 3(n+1)(n-1) \\ &= \frac{n+1}{2} (n(2n-5) + 6(n-1)) \\ &= \frac{n+1}{2} (2n^2 + n - 6) \\ &= \frac{n+1}{2} (n+2)(2n-3) \\ &= \frac{(n+1)(n+1+2)(2(n+1)-5)}{2} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie. On a montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n 3k(k-2) = \frac{n(n+1)(2n-5)}{2}$$

2. Rappeler les valeurs de $\sum_{k=0}^n k$, puis $\sum_{k=0}^n k^2$ et enfin $\sum_{k=0}^n k^3$.

3. Retrouver le résultat précédent de la question 1 en utilisant les valeurs rappelées à la question 2.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 3k(k-2) &= 3 \sum_{k=0}^n k^2 - 6 \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{6n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} (2n+1-6) = \frac{n(n+1)(2n-5)}{2} \end{aligned}$$

4. Soit $n \geq 2$. Effectuer un changement d'indice pour compléter les égalités ci-dessous puis en déduire leur valeur :

(a) En posant $\ell = k - 2$, on obtient :

$$\sum_{k=2}^n (k-2)^2 = \sum_{\ell=0}^{n-2} \ell^2 = \frac{(n-2)(n-2+1)(2(n-2)+1)}{6} = \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}$$

(b) On pose $\ell = k - 1$, l'on obtient

$$\sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 1) = \sum_{k=1}^n (k-1)^2 = \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell^2 = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Réponse de l'exercice 2

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{2}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$.

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{2k+1}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{2k-1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{4k^2 - 1}$$

2. On pose $u_k = \frac{1}{2k+1}$ donc $u_{k+1} = \frac{1}{2k+1}$, donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{4k^2 - 1} = \sum_{k=1}^n \left(\underbrace{\frac{1}{2k-1}}_{u_k} - \underbrace{\frac{1}{2k+1}}_{u_{k+1}} \right) = \underbrace{\frac{1}{2 \times 1 - 1}}_{u_1} - \underbrace{\frac{1}{2(n+1) - 1}}_{u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

Réponse de l'exercice 3

On considère le plan $\vec{\mathcal{P}}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$

On considère $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

1. Justifier que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\vec{\mathcal{P}}$.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Donc la famille $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\vec{\mathcal{P}}$.

2. On a $\vec{w}$ et $\vec{n}$ on pour coordonnées respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ et $\vec{n}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \vec{u} + 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = 2\vec{u} - \vec{v} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

3. On a $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ on pour coordonnées respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

☞ Nous commencerons par déterminer les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v} = \vec{i} - \vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = 3\vec{i} \\ \vec{u} - 2\vec{v} = 3\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\ \vec{j} = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \end{cases}$$

☞ Nous pouvons maintenant procéder comme à la question précédente.

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \vec{i} + \vec{j} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\ \vec{\beta} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \vec{i} - \vec{j} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 4

Soit ABC un triangle quelconque du plan. Soit D et E tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = 4\overrightarrow{AC}$.

1. Expliquer pourquoi $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est une base du plan vectoriel.

☞ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires, donc $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est une famille libre du plan vectoriel.

☞ Or $\mathcal{B} = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est formée de deux vecteurs du plan vectoriel c'est donc une base du plan vectoriel.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DC}$ dans la base $\mathcal{B}$.

☞ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$

☞ $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \frac{-1}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$

3. Montrer que la famille $(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{DC})$ est liée.

☞ Soit nous faisons le déterminant dans la base $\mathcal{B}$. S'il est nul les vecteurs sont colinéaires.

☞ On simplement l'on remarque que $\overrightarrow{BE} = 5\overrightarrow{DC}$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires et la famille $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DC})$ est liée.