E2 | Électrocinétique

Circuits linéaires d'ordre 1

Prérequis

Loi des mailles, loi des Nœud, ponts diviseurs, résistance équivalente	E1
Lois de comportement des composants	E1
Continuité pour un condensateur et une bobine	E1
Notions mathématiques : dérivée des fonctions usuelles	Lycée/CPGE
Notions mathématiques : résolution d'une équation différentielle d'ordre 1	Lycée

I Réponse d'un circuit linéaire du premier ordre à en échelon

I.A Échelon de tension

À connaitre

- Définition d'un échelon de tension, fonction de *Heaviside*. $u(t) = U_0 H(t - t^*)$;
- Régime permanent et régime transitoire ;
- Régime variable et régime continu ;

I.B Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension

I.B.1 Mise en équation

Savoir-faire

Méthode de mise en équation d'un circuit :

1. Écrire toutes les lois de comportement et lois des mailles et des nœuds ;
2. Remplacer les grandeurs qu'on ne veut par d'autres ;
3. (optionnel) Dériver toute l'équation si nécessaire ;
4. Obtenir une équation différentielle.

À connaitre

Forme canonique d'une équation différentielle d'ordre 1 : $y' + ay = b$

I.B.2 Résolution de l'équation différentielle (math)

À connaitre

- Solution générale d'une équation différentielle d'ordre 1 : $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$
- Solution homogène d'une équation différentielle d'ordre 1 à coefficient constant : $y_h(t) = Ae^{-at}$

- Solution particulière constante d'une équation différentielle d'ordre 1 : $y_p(t) = \frac{b}{a}$

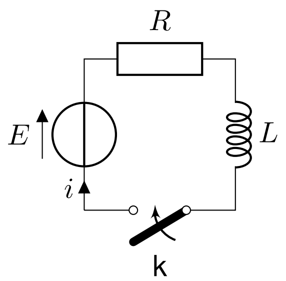
Savoir-faire

- Résoudre une équation différentielle d'ordre 1 à coefficient constant ;
- Déterminer la constante d'intégration A à l'aide de la condition initiale :
  1. déterminer la condition initiale à l'aide des conditions de continuité ;
  2. appliquer la condition initiale à la solution générale pour déterminer A ;
  3. écrire la solution complète.

I.B.3 Interprétation physique de la solution

I.C Cas d'un circuit RL

Application 1 : Réponse d'un circuit RL à un échelon de tension



À l'instant initial $t = 0$, l'interrupteur est fermé. Le générateur de tension idéal fournit une tension E continue.
1 Écrire l'équation différentielle sur le courant i ;
2 Résoudre l'équation différentielle ;
3 Tracer la solution.

Solution
1

Loi des mailles :

$$E = u_R + u_L$$

il faut définir les termes !

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

On pose $\tau = \frac{L}{R}$ (constante de temps du circuit RL).

2

Solution homogène :

$$i_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Solution particulière :

$$i_p(t) = \frac{E}{R}$$

Solution générale :

$$i(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Condition initiale : $i(0) = 0$ (continuité de le courant dans une bobine)

$$0 = \frac{E}{R} + A \implies A = -\frac{E}{R}$$

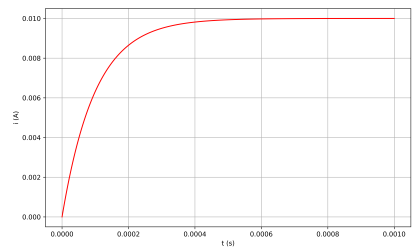
Solution complète :

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

3

1. la solution est homogène ;
2. la solution est nulle à l'instant initial ;
3. la solution est croissante ;
4. la solution temps vers $\dfrac{E}{R}$ quand $t \to +\infty$;

Tracé de la solution :



II Réponse d'un circuit linéaire du premier ordre en régime libre

II.A Régime libre

À connaitre

Définition d'un régime libre

II.B Réponse d'un circuit RC en régime libre

À connaitre

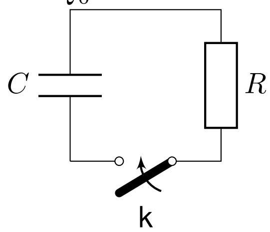
Définition : terme de forçage

Savoir-faire

Résoudre une équation différentielle d'ordre 1 homogène à coefficients constants

Application 2 : décharge d'un condensateur

Nous étudions la décharge d'un condensateur initialement chargé dans un circuit RC : $Q(t = 0) = Q_0$. À l'instant initial $t = 0$, l'interrupteur nous fermons l'interrupteur.



1 Écrire l'équation différentielle sur la charge Q du condensateur ;
2 Résoudre l'équation différentielle ;
3 Tracer la solution.

Solution
1

Loi des mailles :

$$u_R + u_C = 0$$

il faut définir les termes !

$$Ri + \frac{Q}{C} = 0$$

$$R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}Q = 0$$

On pose $\tau = RC$ (constante de temps du circuit RC).

2

Solution homogène :

$$Q_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Il n'y a pas de solution particulière car le second membre est nul. Solution générale :

$$Q(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Condition initiale : $Q(0) = Q_0$ (charge initiale du condensateur)

$$Q_0 = A \implies A = Q_0$$

Solution complète :

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

3

1. la solution est homogène ;
2. la charge initiale est Q_0 ;
3. la solution est décroissante ;
4. la solution temps vers 0 quand $t \to +\infty$;