E2 | Électrocinétique

Les circuits électriques linéaires du 1er ordre

Prérequis

Circuits et ARQS	Chapitre E1
Relations de continuité pour un condensateur et une bobine	Chapitre E1
Lois de comportement des dipôles électrocinétiques	Chapitre E1
Bilan énergétique des dipôles	Chapitre E1
Lois des mailles, lois de nœuds, pont diviseur de tension	Chapitre E1
Notion mathématique : résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constant sans second membre ou avec second membre constant	Lycée

Plan

Figure de cours

Savoirs

Régime permanent / établi	/
Régime transitoire	/
Régime libre	/
Échelon	/

- Solution d'une équation différentielle du 1erordre. //
- Lien entre solution particulière et régime permanent ///
- Lien entre solution homogène et régime transitoire ///

Savoir-Faire

- Mettre en équation un circuit électrocinétiques du 1er ordre //
- Déterminer la solution d'un circuit électrocinétiques du 1er ordre //
- Déterminer le temps caractéristique du régime transitoire //
- Réaliser un bilan d'énergie sur un circuit électrocinétiques du 1er ordre //

Application 1 : Résolution de l'équation différentielle sur la charge d'un condensateur

Soi la charge d'un condensateur dont l'équation est :

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

avec E une constante.
Déterminer la solution générale de cette équation différentielle.

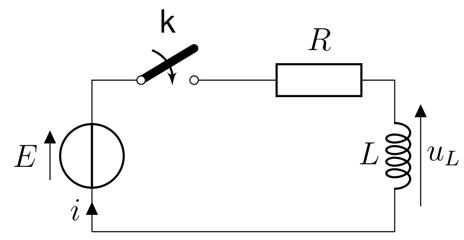
Solution :

$$u_c(t) = \lambda \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + E$$

avec λ une constante d'intégration.

Application 2 : Charge d'un circuit RL série

Soit le circuit ci-dessous. À l'instant initial nous fermons le l'interrupteur.



1. Déterminer l'équation différentielle vérifier par l'intensité i.
2. Déterminer la valeur initiale l'intensité.
3. Résoudre l'équation différentielle.
4. En déduire u_L.
5. Tracé i et u_L en fonction du temps.

Réponse :

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$$

avec $\tau = L/R$.

$$u_L(t) = E \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

Application 3 : Bilan d'énergie sur la charge d'un condensateur

Faire un bilan d'énergie sur la charge d'un condensateur.
Solution : Loi des mailles :

$$E = u_R + u_C$$

Nous multiplions par i des deux côtés :

$$Ei = Ri^2 + u_C C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$\underbrace{Ei}_{\text{Puissance générateur}} = \underbrace{Ri^2}_{\text{Puissance dissipée par effet \textit{Joule}}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}_{\text{Puissance stockée dans le condens}}$$

Pour obtenir le bilan d'énergie, nous intégrons au cours du temps :
Énergie cédée par le générateur :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_g &= \int_0^\infty Ei(t)\,\mathrm{d}t \\ &= E\int_0^\infty i(t)\,\mathrm{d}t \\ &= E\int_0^\infty \frac{C\,\mathrm{d}u_C}{\cancel{\mathrm{d}t}}\cancel{\mathrm{d}t} \\ &= CE\left[u_C(t)\right]_0^\infty \\ &= CE^2\end{aligned}$$

Énergie dissipée par effet *Joule* :

$$\mathcal{E}_R = \int_0^\infty Ri^2(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{or}\quad i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{R}\exp -t/\tau$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_R &= R\frac{E^2}{R^2}\int_0^\infty \exp\left(\frac{-2t}{\tau}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}\exp\left(\frac{-2t}{\tau}\right)\right]_0^\infty \\ &= \frac{CE^2}{2} = \frac{\mathcal{E}_g}{2}\end{aligned}$$

L'énergie cédée par le générateur est pour moitié dissipée par effet *Joule*.
Énergie stockée dans le condensateur :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_C &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\cancel{\mathrm{d}t}}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)\cancel{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{1}{2}C\left[u_C^2\right]_0^\infty \\ &= \frac{CE^2}{2} = \frac{\mathcal{E}_g}{2}\end{aligned}$$

L'autre moitié de l'énergie est stockée dans le condensateur.