TD E2 | Électrocinétique

Ordre 1

exercice sera corrigé en TD ;
exercice classique / important ; à maîtriser pour les concours ;
niveau de difficulté de l'exercice.

Parcours d'entrainement :

Je suis à l'aise avec le chapitre	Exercices 1, 2, 3, 5
Je ne suis pas à l'aise	Exercices 1, 5, 6, 7

Révisions mathématiques

Exercice 1 : Résolution d'équations différentielles

Résoudre les équations différentielles suivantes :

Dans tous les exemples suivants x, y, v, u et i sont des fonctions de la variable t. Pour simplifier les écritures les termes en $x(t)$ sera noté x (idem pour y, v, u et i).
La notation x' fait référence à la dérivée première de x par rapport à t : $x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.
a, b, c et E sont des coefficients constants.

$$y' + ay + c = 0 \quad \text{avec} \quad y(t=0) = c/a \quad (1)$$
$$x' + x = 0 \quad \text{avec} \quad x(t=0) = 1 \quad (2)$$
$$y' = y \quad \text{avec} \quad y(t=0) = \mathrm{e}^1 \quad (3)$$
$$v' + v/\tau = a \quad \text{avec} \quad v(t=0) = 0 \quad (4)$$
$$u' + u/\tau = 0 \quad \text{avec} \quad u(t=0) = E \quad (5)$$
$$u' + u/\tau = E/\tau \quad \text{avec} \quad u(t=0) = 2E \quad (6)$$
$$i' + i/\tau = 0 \quad \text{avec} \quad i(t=0) = a \quad (7)$$
$$\tau i' = -i + c \quad \text{avec} \quad i(t=0) = -c \quad (8)$$

Rappel mathématique

Méthode pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre constant ou nul.
Soit l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = B \quad \text{avec} \quad a, B \in \mathbb{R}^2$$

1. rechercher une solution homogène de l'équation différentielle homogène ;

$$\frac{\mathrm{d}y_h}{\mathrm{d}x} + ay_h = 0$$

La solution homogène est :

$$y_h = \lambda \exp(-ax) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. rechercher une solution particulière y_p sous la forme d'une constante ;

$$y_p = B/a$$

3. écrire une solution générale :

$$y = y_h + y_p = y_h = \lambda \exp(-ax) + B/a$$

4. déterminer la constante d'intégration λ à l'aide des conditions initiales.

Maîtriser son cours

Exercice 2 : Circuit RL

Soit un circuit électrique composé d'un générateur de tension, d'un interrupteur k, d'un résistor de résistance R et d'une bobine d'inductance L.

Le générateur de tension impose une tension constante à ses bornes : E_0.

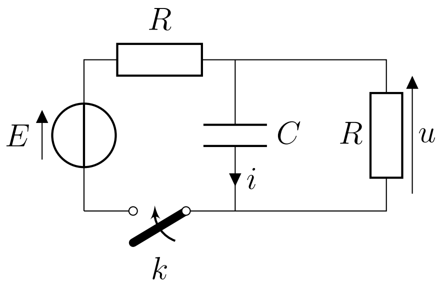
L'interrupteur est fermé depuis longtemps, et à l'instant $t = 0$ nous le fermons.

(1) Représenter le circuit électrique.
(2) Établir l'équation différentielle portant sur la tension aux bornes de la résistance : u_R. Nous introduirons une constante de temps τ.
(3) Déterminer la tension initiale aux bornes de la résistance : $u_{R,0}$.
(4) Résoudre l'équation différentielle sur u_R.
(5) Tracer le graphique de l'évolution de la tension u_R au cours du temps.

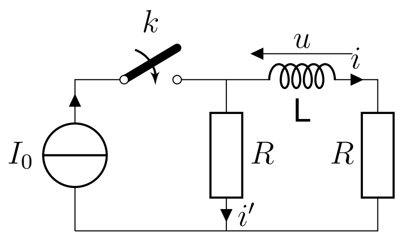
Exercice 3 : Régime permanent et conditions initiales

Pour chaque circuit ci-dessous déterminer, déterminer les grandeurs u, i et i' si elles sont présentes, pour
(1) à l'instant initial, c'est-à-dire juste après la fermeture de l'interrupteur, sachant qu'il est ouvert depuis longtemps ;
(2) en régime permanent.

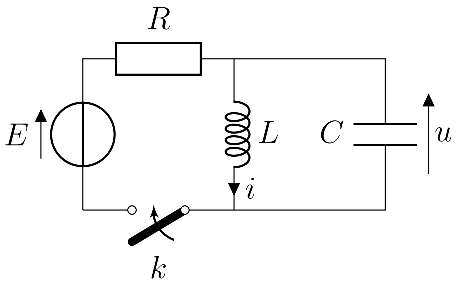
(a)



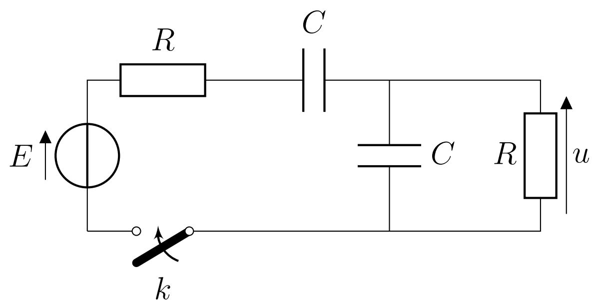
(b)



(c)

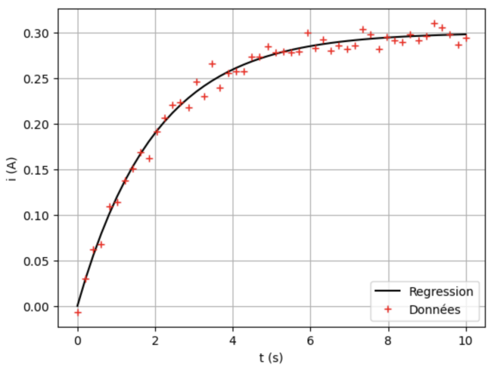


(d)

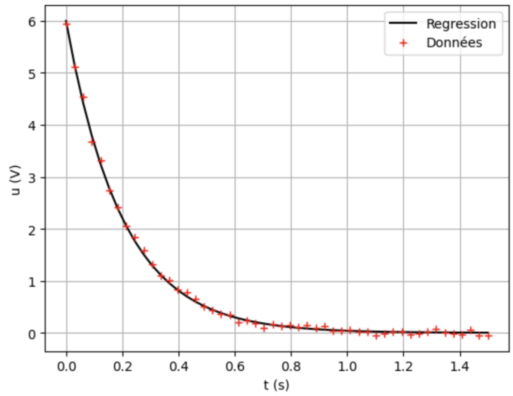


Exercice 4 : Constante de temps

(1) Sur les graphiques ci-dessous, déterminer la constante de temps caractéristique de variation du signal. Déterminer également la valeur initiale et la valeur en régime permanent.



Circuit (a)



Circuit (b)

Approfondir son cours

Exercice 5 : Étude d'un circuit RC

Nous étudions le circuit de la figure 1. À l'instant initial nous fermons l'interrupteur k après que le circuit soit resté longtemps ouvert.

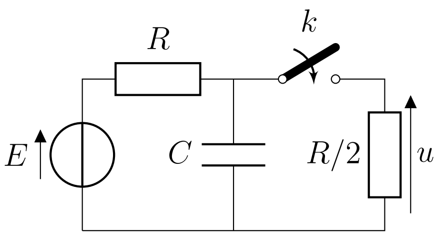


FIGURE 1 – Étude d'un circuit RC

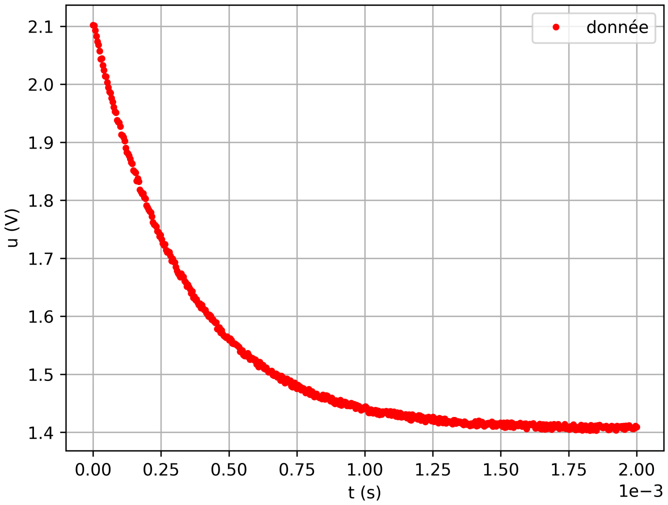


FIGURE 2 – Résultat expérimental

1 Déterminer la tension à l'instant initiale $u(t=0) = U_0$.
2 En utilisant les équivalents en régime permanent, déterminer quand t est très grand $u(t \to \infty) = U_\infty$
3 Monter que l'équation différentielle vérifiée par la tension u est :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{3\tau}$$

où l'on exprimera τ en fonction de R et C.
4 Sachant que $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$. Déterminer, à l'aide du graphique fourni la capacité C du condensateur.

Exercice 6 : Circuit soumis à un échelon de courant

Nous étudions le circuit de la figure 3. À l'instant initial nous fermons l'interrupteur k après que le circuit soit resté longtemps ouvert.
1 Déterminer les courants i et i' juste après la fermeture de l'interrupteur k.
2 Déterminer l'évolution du courant $i(t)$.
3 En déduire $i'(t)$ ainsi que $u(t)$.
4 Tracer les courbes $i(t)$ et $u(t)$.

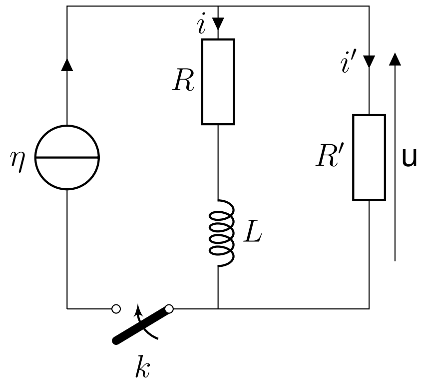


FIGURE 3 – Étude d'un circuit soumis à un échelon de courant

Aller plus loin

Exercice 7 : Décharge d'un condensateur dans un autre

On considère le circuit de la figure 4. Le condensateur de capacité C_1 porte la charge q_0 sur l'armature du haut, et celui de capacité C_2 est déchargé. À l'instant initial, on ferme l'interrupteur.

1 Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ dans le circuit pour $t \geq 0$.

2 Déterminer la solution de cette équation différentielle.

3 Quelles sont les charges des deux condensateurs au bout d'un temps très long ($t \to \infty$) ? Commenter.

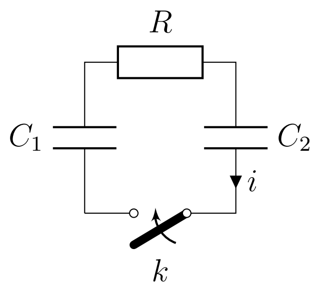


FIGURE 4 – Étude d'un circuit soumis à un échelon de courant