Exercice 1 : Résolution d'équations différentielles

Résoudre les équations différentielles suivantes :

Dans tous les exemples suivants x, y, v, u et i sont des fonctions de la variable t. Pour simplifier les écritures les termes en $x(t)$ sera noté x (idem pour y, v, u et i).
La notation x' fait référence à la dérivée première de x par rapport à t : $x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.
a, b, c et E sont des coefficients constants.

$$y' + ay + c = 0 \quad \text{avec} \quad y(t=0) = c/a \quad (1)$$
$$x' + x = 0 \quad \text{avec} \quad x(t=0) = 1 \quad (2)$$
$$y' = y \quad \text{avec} \quad y(t=0) = \mathrm{e}^1 \quad (3)$$
$$v' + v/\tau = a \quad \text{avec} \quad v(t=0) = 0 \quad (4)$$
$$u' + u/\tau = 0 \quad \text{avec} \quad u(t=0) = E \quad (5)$$
$$u' + u/\tau = E/\tau \quad \text{avec} \quad u(t=0) = 2E \quad (6)$$
$$i' + i/\tau = 0 \quad \text{avec} \quad i(t=0) = a \quad (7)$$
$$\tau i' = -i + c \quad \text{avec} \quad i(t=0) = -c \quad (8)$$

[1] $y' + ay = -c$ (ED)

- Solut° homogène (SH) de l'équat° différentielle homogène (EDH)

$y_h' + a y_h = 0$ (EDH)

(SH) $y_h = k \exp(-at)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

- solution particulière (SP)

↳ le second membre $-c$, est égal à une constante, je cherche $y_p = c^{ste}$.

↳ j'injecte dans (ED) en remplaçant $\begin{cases} y \text{ par } y_p \\ y' \text{ par } y_p' \end{cases}$

$0 + a y_p = -c \iff y_p = -\frac{c}{a}$ (SP)

- Solut° générale (SG)

$y = y_h + y_p$

$y(t) = k \exp(-at) - \frac{c}{a}$ SG

- Détermination de k.

$$y(t=0) \underset{\text{cdt°}}{=} \frac{c}{a} \underset{SG}{=} k \exp(-a \times 0) - \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{2c}{a}$$

donc la solution finale est $\boxed{y(t) = \frac{c}{a}\left(2 \exp(-at) - 1\right)}$

---

[2] $x' + x = 0$, je reconnais une équation diff <u>homogène</u>

$$x(t) = k \exp(-t) \quad (SG) \quad k \in \mathbb{R}$$

$$x(t=0) \underset{\text{cdt°}}{=} 1 \underset{(SG)}{=} k \exp(0) \quad \Leftrightarrow \quad k = 1$$

$$\boxed{x(t) = \exp(-t)}$$

---

[3] $y' - y = 0$ je reconnais une $(E\underline{\underline{D}}H)$.

donc $y(t) = k \exp(t)$ $k \in \mathbb{R}$

on $y(t=0) \underset{\text{cdt°}}{=} e^1 = k \exp(0) \Leftrightarrow k = e^1$

$$\boxed{y(t) = e^1 \exp(t) = \exp(t+1)}$$

---

[4] $v' + \frac{v}{\tau} = a$

(SH) $v_h = k \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

(SP) $v_p = a\tau$

(SG) $v = k \exp(-t/\tau) + a\tau$, $k \in \mathbb{R}$

(k?) $0 = k + a\tau \Leftrightarrow k = -a\tau$

(SF) $\boxed{v(t) = a\tau\left(1 - \exp -t/\tau\right)}$

5 $u' + u/\tau = 0$ Je reconnais une (EDH).

(SG) $u(t) = k \exp(-t/\tau)$, $k \in \mathbb{R}$

(k?) $u(0) = E = k$

(SF) $\boxed{u(t) = E\exp(-t/\tau)}$

---

6 $u' + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$

(SH) $u_h = k\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$, $k \in \mathbb{R}$

(SP) $u_p = E$

(SG) $u = k\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + E$

(k?) $u(t=0) \underset{\text{cdt}^\circ}{=} 2E \underset{(SG)}{=} k + E$

$k = E$

(SF) $\boxed{u(t) = E\left(1 + \exp -t/\tau\right)}$

---

7 $i' + \frac{i}{\tau} = 0$ Je reconnais une (EDH)

(SG) $i(t) = k\exp(-t/\tau)$, $k \in \mathbb{R}$

(k?) $i(0) = a = k$

(SF) $\boxed{i(t) = a\exp(-t/\tau)}$

---

8 $i' + \frac{i}{\tau} = \frac{c}{\tau}$

(SH) $i_h = k\exp(-t/\tau)$

(SP) $i_p = c$

(SG) $i = k\exp(-t/\tau) + c$

(k?) $i(t=0) \underset{\text{cdt}^\circ}{=} -c \underset{SG}{=} k + c$

$k = -2c$

(SF) $\boxed{i(t) = c\left(1 - 2\exp -t/\tau\right)}$