M1 | Mécanique

Cinématique du point matériel

Prérequis

Notions mathématiques : vecteur, projection de vecteur	Lycée et prépa
Notion mathématiques : dérivée d'une fonction	Lycée et prépa
Poids, gravitation, loi de Newton	Lycée

Plan

I. Système et référentiel

I.A. Système (mécanique)
I.B. Référentiel (spatial)
I.C. Référentiels usuel
I.D. Temps absolu (référentiel temporel)
I.E. Référentiel galilén ou 1er loi de *Newton*

II. Cinématique : description du mouvement

II.A. Repère cartésien
II.B. Vecteur position
II.C. Vecteur vitesse
II.D. Vecteur accélération
II.E. Cas d'un vecteur accélération constant

Savoirs

Notion de point matériel	I
Référentiel terrestre (laboratoire), géocentrique et héliocentrique sont galiléens	I
Principe d'inertie ou 1er loi de *Newton*	I
Repère cartésien immobile dans le référentiel galiléens	II
Vecteur position : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$	II
Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$	II
Vecteur accélération : $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$	II
Expressions des vecteurs position, vitesse et accélération dans le repère cartésien	II
Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire	II

Savoir-Faire

Définir un système	I
Définir un référentiel	I
Projeter un vecteur dans une base	II
Déterminer la vitesse puis la position en dérivant successivement l'accélération	II
Déterminer la vitesse puis l'accélération en intégrant successivement la position	II

Application 1 : Étude d'un mouvement

Énoncé On considère le mouvement suivant :

$$\left| \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} 0 \\ at \\ -\dfrac{gt^2}{2} + bt \end{array} \right.$$

1 Déterminer l'expression du vecteur vitesse puis du vecteur accélération.
2 Trouver l'équation de la trajectoire $z(y)$.
3 Tracer la trajectoire. Représenter des vecteurs vitesses et accélérations sur la trajectoire.

Solution

1 Nous dérivons les équations du mouvement fournies :

$$\vec{v} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ a \\ -gt + b \end{array} \right.$$

Nous faisons de même pour obtenir le vecteur accélération :

$$\vec{v} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -g \end{array} \right.$$

Le vecteur accélération est constant. Nous nous trouvons dans une situation de pesanteur.

2

$$y(t) = at \Rightarrow t = y/a$$
$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + bt \Rightarrow z(y) = -\frac{1}{2a^2}gy^2 + \frac{b}{a}y$$

3 La trajectoire est une parabole concave passant par l'origine. Les vecteurs vitesses sont tangents à la trajectoire. Les vecteurs accélérations sont dirigés vers le bas (dans le sens de la concavité).

Application 2 : Accélération constante

Énoncé Nous étudions le mouvement d'un objet donc l'accélération est constante. Déterminer la vitesse puis la position. Préciser comment déterminer les constantes d'intégration.

Solution Il est possible de décomposer dans la base cartésienne, mais nous allons faire un travail vectoriel.

$$\vec{a} = \vec{C_1} \in \mathbb{R}^3$$

or $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

par intégration (vecotrielle) $\vec{v} = \vec{a}t + \vec{C_2}$ avec $\vec{C_2} \in \mathbb{R}^3$

par intégration (vecotrielle) $\overrightarrow{OM} = \vec{a}\dfrac{t^2}{2} + \vec{C_2}t + \vec{C_3}$

avec $\vec{C_3} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{C_2}$ correspond au vecteur vitesse initial et $\vec{C_3}$ correspond à la position initiale. Ainsi, la connaissance d'une position et d'une vitesse et de l'accélération à tout instant permet de déterminer la trajectoire à tout instant.