

**Dynamique du point matériel**

Prérequis



Notions mathématiques :

Math

- Dérivée d'une fonction scalaire et vectorielle ;
- Projection d'un vecteur sur un axe, produit scalaire ;
- Manipulation des vecteurs ;
- Résolution d'équations différentielles d'ordre 1 ;
- Déterminer la primitive d'une fonction usuelle ;



Notions physiques :

Lycée

- Poids : $\vec{P} = m \vec{g}$ dirigé vers le bas, avec $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur, valeur moyenne $9,81 \text{ m s}^{-2}$ sur Terre ;
- Force gravitationnelle entre deux corps massifs :

$$\vec{F}_{1/2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

avec $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

- Lois de Newton :
 - ▶ 1ère loi : principe d'inertie ;
 - ▶ 2ème loi : $\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}$;
 - ▶ 3ème loi : principe d'action-réaction.



Notions physiques :

Prépa

- M1 - cinématique

I Interaction et modèle de force**I.A Définition d'une force****I.B Actions réciproques ou 3^{ème} loi de Newton****À connaître**

Principe des actions réciproques : 3e loi de Newton

I.C Forces usuelles**À connaître**

L'expression des forces usuelles :

- ↔ force gravitationnelle ;
- ↔ poids ⚠ il ne peut pas y avoir poids et force gravitationnelle ;
- ↔ force électrostatique ;
- ↔ force de pression

- ↪ tension d'un fil / d'une tige ;
- ↪ force élastique : ressort ;
- ↪ réaction du support : force de *Coulomb* ;
- ↪ poussée d'Archimède
- ↪ frottements fluides

Savoir-faire

Identifier les interactions s'appliquant sur un point matériel. En déduire les forces. Les projeter dans la base d'intérêt.

Application 1 : Poussée d'Archimède sur une bille

Énoncé

- ① Déterminer la poussée d'*Archimède* exercée sur une bille de rayon $r = 3 \text{ cm}$.
- ② On observe que la bille coule, en déduire une condition sur sa masse.

Solution

- ① Faire schéma.

Système : bille, de masse m

Bilan des actions mécaniques : poids et poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi} = -\rho_f \frac{4}{3} \pi r^3 \vec{g}$$

- ② Sachant que la bille coule, le poids de celle-ci est supérieur à la poussée d'*Archimède*.

$$\begin{aligned} \|m \vec{g}\| &\geq \left\| \rho_f \frac{4}{3} \pi r^3 \vec{g} \right\| \\ m &\geq \rho_f \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

Application 2 : Fraction immergée d'un iceberg

Énoncé

Nous donnons le rapport des masses volumiques de l'eau solide sur l'eau liquide (densité) : $d = \frac{\rho_s}{\rho_l} = 0,9$. Déterminer la fraction de glace immergée d'un iceberg de forme quelconque.

Solution

Faire un schéma. Système étudié : iceberg. Bilan des AME : poids, poussée d'Archimède sur le volume immergée, nous négligeons la poussée d'Archimède dans l'air. L'iceberg est à l'équilibre, donc la somme des forces est nulle :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \rho_s V_{tot} \vec{g} - \rho_f V_s \vec{g} \\ \frac{V_s}{V_{tot}} &= \frac{\rho_s}{\rho_l} \end{aligned}$$

Application numérique $\frac{V_s}{V_{tot}} = 0,9$

90 % du volume d'un iceberg est immergé. D'où l'expression "ne voir que la partie émergée de l'iceberg" ... rater le plus important.

Application 3 : Frottement sec

Énoncé Soit une masse m sur un plan incliné à $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Déterminer une condition sur le coefficient de frottement f pour que la masse ne glisse pas.

Solution Faire schéma. Système : masse m considérée comme un point matériel. BAME : poids, réaction du support $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$. Référentiel : laboratoire, supposé galiléen. La masse est immobile, nous appliquons le PFS :

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$$

Nous projetons dans la direction de $\vec{N}$ et $\vec{T}$:

$$\begin{aligned} / \vec{T} \quad 0 &= -mg \sin \alpha + T \\ / \vec{N} \quad 0 &= -mg \cos \alpha + N \end{aligned}$$

D'où nous tirons les expressions pour T et N :

$$\begin{aligned} T &= mg \sin \alpha \\ N &= mg \cos \alpha \end{aligned}$$

Or, la masse est immobile sur le plan incliné, donc $T < fN$:

$$\begin{aligned} T &= mg \sin \alpha < fN = fmg \cos \alpha \\ \sin \alpha &< f \cos \alpha \\ \tan \alpha &< f \\ f &> 1 \end{aligned}$$

II Dynamique du point matériel

II.A Quantité de mouvement

À connaître

Définition de la quantité de mouvement $\vec{p}$.

II.B Principe fondamental de la dynamique

À connaître

- Principe fondamental de la dynamique ou 2e loi de *Newton*
- Cas d'une masse constante ;
- Cas statique ;

Savoir-faire

Appliquer le principe fondamental de la dynamique pour en déduire le mouvement d'un point matériel

Application 4 : Point matériel isolé ou pseudo-isolé

Énoncé Montrer que pour un point isolé ou pseudo-isolé dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement est constante. En déduire la nature du mouvement. Conclure.

Solution

Faire schéma

Système : M de masse m

BAME : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ car isolé ou pseudo-isolé

Référentiel : supposé galiléen

Nous appliquons le PFD :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{p} = \vec{C} \quad \text{avec } \vec{C} \in \mathbb{R}^3$$

Or on sait que $\vec{p} = m\vec{v}$, donc $\vec{v} = \frac{\vec{C}}{m}$. Et $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$, d'où par intégration :

$$\vec{OM} = \frac{\vec{C}}{m}t + \vec{C}_1 \quad \text{avec } \vec{C}_1 \in \mathbb{R}^3$$

La trajectoire est une droite parcourue à vitesse constante : trajectoire rectiligne uniforme.

Remarque si $\vec{C}_1 = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{0}$ alors le mobile est fixe dans le référentiel, ce qui est un cas particulier.

III Étude de cas

III.A Chute libre : sans frottement et avec frottement fluide

Application 5 : Chute libre d'une bille

Énoncé Nous lâchons une bille de masse m d'une hauteur h sans vitesse initiale. Nous supposons le champ de pesanteur $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ uniforme. Nous négligeons les frottements de l'air.

Nous prenons l'axe z dirigé vers le haut.

① Faire un bilan des actions mécaniques s'appliquant sur la bille.

② Justifier que nous pouvons faire une étude 1D.

③ Déterminer l'équation différentielle sur z .

④ Résoudre l'équation précédente.

Nous supposons maintenant que les frottements fluides sont de la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ où $\lambda > 0$.

⑤ Le problème est-il toujours 1D ?

⑥ Déterminer l'équation différentielle sur la vitesse verticale $v = \vec{v} \cdot \vec{e}_z$. Introduire un temps caractéristique τ .

⑦ Résoudre l'équation précédemment obtenue. En déduire la vitesse limite (vitesse en régime permanent).

⑧ En déduire $z(t)$. Tracer qualitativement sur un même graphique $z(t)$ dans le cas avec et sans frottements.

Solution

① Faire schéma.

Système : bille de masse m supposée ponctuelle en M ;

BAME : poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$

② Les contraintes sont uniquement selon l'axe (Oz), et les conditions initiales aussi. Le mouvement est donc contenu sur l'axe (Oz).

③ Référentiel : terrestre, supposé galiléen. Nous appliquons le PFD :

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

$$/\vec{e}_z \quad \ddot{z} = -g$$

④ Nous intégrons deux fois pour obtenir la position :

$$z(t) = \frac{-1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \quad (C_1, C_2) \in (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

CI $\dot{z}(t=0) = 0$ vitesse initiale nulle

d'où $C_1 = 0$

CI $z(t=0) = h$ hauteur initiale

d'où $C_2 = h$

$$z(t) = \frac{-1}{2}gt^2 + h$$

⑤ Le problème reste 1D, car la nouvelle contrainte (les frottements) est aussi dirigée selon $\vec{e}_z$, et ne va donc pas modifier la trajectoire selon $\vec{e}_x$ ou $\vec{e}_y$.

⑥ Nous appliquons le PFD dans les mêmes conditions que précédemment, en ajoutant la force de frottement fluide :

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \lambda\vec{v}$$

$$/\vec{e}_z \quad \dot{v} + \frac{\lambda}{m}v = -g$$

Nous reconnaissons une équation différentielle d'ordre 1 à coefficient constante et à second membre constant.

Nous posons $\tau = \frac{m}{\lambda}$.

⑦ La solution de l'équation différentielle est :

$$v(t) = Ce^{\frac{-t}{\tau}} - g\tau$$

À l'aide de la condition initiale, $v(t=0) = 0$, nous pouvons en déduire la constante d'intégration C :

$$C = g\tau$$

Au final, la vitesse est :

$$v(t) = -g\tau \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

La vitesse limite est obtenue pour $t \rightarrow \infty$:

$$v_{\text{lim}} = v(t \rightarrow \infty) = -g\tau$$

Remarque : une façon plus rapide et élégante d'obtenir la vitesse limite est de remarquer qu'en régime permanent les forces de frottement viennent compenser la gravité, ainsi la vitesse est constante. Dans l'équation différentielle cela donne : $v_{\text{lim}} = -g\tau$.

⑧ Par intégration de la vitesse, nous en déduisons la position $z(t)$:

$$z(t) = -g\tau \left(t + \tau e^{-t/\tau} \right) + C$$

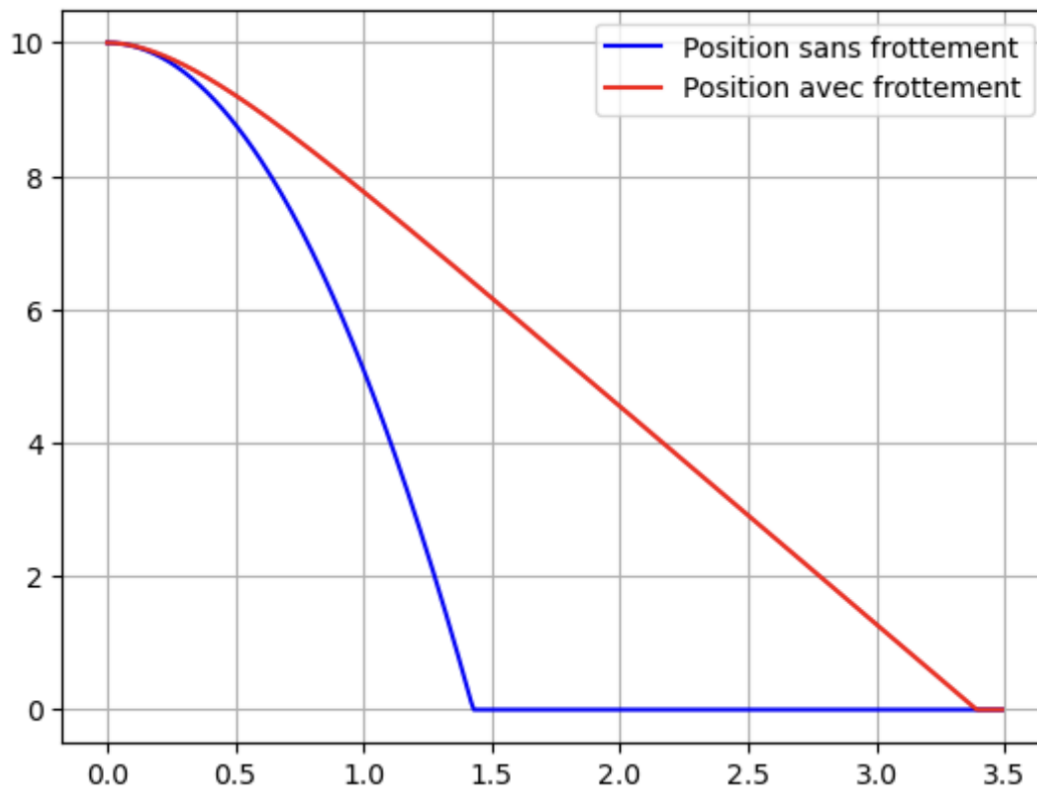
Nous utilisons les conditions initiales pour déterminer la constante d'intégration C :

$$\begin{aligned} z(0) = h &= -g\tau^2 + C \\ C &= h + g\tau^2 \end{aligned}$$

Au final :

$$z(t) = -g\tau \left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \right) + h$$

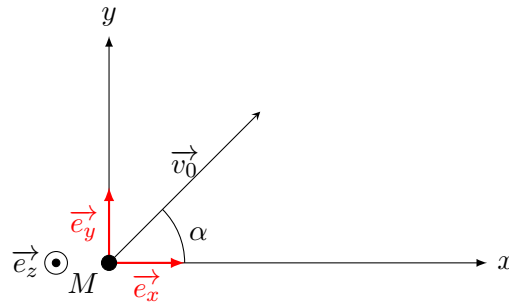
Pour le tracé, courbe quadratique concave pour le cas sans frottement. Pour le cas avec frottement, c'est plus délicat, car cela dépend de la masse et du coefficient de frottement. Le début de la courbe est exponentielle, puis temps vers une droite affine. En tout cas, le cas avec frottement doit-être plus lent que le cas sans frottement. Seul une représentation qualitative est exigible.



III.B Trajectoire balistique

✍ Application 6 : Mouvement dans un champ uniforme

Énoncé Nous lançons une balle de masse m avec une vitesse initiale comme sur le schéma ci-dessous. La balle est initialement à l'origine du repère.



- ① Par application du principe fondamental, déterminer les équations différentielles du mouvement portant sur x , y , z et leurs dérivées.
- ② Par intégration, en déduire : $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ et $\dot{z}(t)$. En déduire le vecteur vitesse $\vec{v}$.
- ③ En déduire : $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

Solution

- ① Compléter schéma avec les forces. Système : M de masse m .

BAME : poids : $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{e}_z$

Référentiel : terrestre, supposé galiléen.

Nous appliquons le PFD :

$$m \vec{a} = m \vec{g}$$

Nous projetons sur les 3 axes :

$$\begin{vmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{vmatrix}$$

- ② Nous intégrons une fois pour trouver la vitesse selon chaque direction :

$$\begin{vmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 \\ -gt + C_2 \\ C_3 \end{vmatrix}$$

avec $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ des constantes d'intégration que nous devons déterminer à partir de la vitesse initiale. Projets $\vec{v}_0$:

$$\vec{v}_0 = \begin{vmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ v_0 \sin(\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Donc on en déduit :

$$\begin{aligned} C_1 &= v_0 \cos(\alpha) \\ C_2 &= v_0 \sin(\alpha) \\ C_3 &= 0 \end{aligned}$$

Au final :

$$\begin{vmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ -gt + v_0 \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$ d'où :

$$\vec{v} = v_0 \cos(\alpha)\vec{e}_x + (-gt + v_0 \sin \alpha)\vec{e}_y$$

③ Nous intégrons la vitesse pour déterminer la position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha)t + C_4 \\ -gt^2/2 + v_0 \sin \alpha t + C_5 \\ C_6 \end{pmatrix}$$

Où $(C_4, C_5, C_6) \in \mathbb{R}^3$ sont des constantes d'intégration que nous devons déterminer à partir de la position initiale.

$$\overrightarrow{OM}(t=0) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Au final :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha)t \\ -gt^2/2 + v_0 \sin(\alpha)t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : il est possible de résoudre ce problème sous forme vectorielle directement, ce qui épargne beaucoup de calculs :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$$

par intégration $\vec{v} = \vec{g}t + \vec{A}$ avec $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$

CI $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ v_0 \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{A}$

donc $\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0$

par intégration $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{B}$ avec $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$

CI $\overrightarrow{OM}(t=0) = \vec{0} = \vec{B}$

finalement $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0t$

On en déduit directement les composantes :

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t$$

$$y(t) = -gt^2/2 + v_0 \sin(\alpha)t$$

$$z(t) = 0$$