



M3 | Mécanique



Étude de mouvement circulaire



Prérequis

-  Notions mathématiques : vecteur, projection de vecteur Lycée et prépa
-  Notion mathématiques : dérivée d'une fonction Lycée, prépa et FO7
-  Notion mathématiques : dérivée d'une fonction composée Math CPGE et FO7
-  Cinématique chapitre M1
-  Dynamique Chapitre M2



Plan

I. Coordonnées polaires

- I.A. Définition
- I.B. Position, vitesse, et accélération en coordonnées polaires

II. Déplacement élémentaire

- II.A. Définition
- II.B. En coordonnées cartésiennes
- II.C. En coordonnées polaires

III. Coordonnées cylindriques

IV. Mouvement des satellites et des planètes

- IV.A. Rappels
- IV.B. Lois de Kepler
- IV.C. Exemple



Savoirs

-  Coordonnées polaires I
-  Position, vitesse et accélération en coordonnées polaires I
-  Dérivées des vecteurs de base : $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$ I
-  Déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ II
-  Expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques II
-  Coordonnées cylindriques III
-  Position, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques III
-  Référentiels : lequel utiliser dans quelle situation IV
-  Lois de *Kepler* : 1^{ère} loi : loi des trajectoires, 2^{ème} loi : loi des aires IV

☺ 3^{ème} loi de *Kepler* : loi des périodes : $\frac{T^2}{a^3} =$ IV

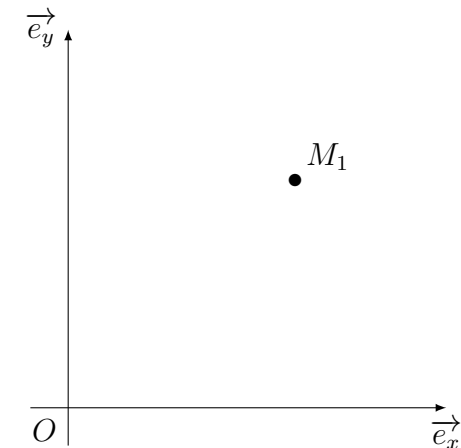
$\frac{4\pi^2}{GM_{\text{astre}}} = C^{\text{ste}}$ l'expression n'est pas exigible, mais il faut savoir que le rapport est constant.

⚙️ Savoir-Faire

- ⚙️ Utiliser le repère adéquat suivant la situation I et III
- ⚙️ Projeter un vecteur dans la base polaire ou cylindrique I et III
- ⚙️ Étudier le mouvement d'un satellite ou d'une planète à l'aide du PDF et des lois de Kepler IV

✍️ Application 1 : Base polaire

Énoncé Pour tous les points M_i , représenter la base polaire.



✍️ Application 2 : Vitesse dans la base polaire

Énoncé

- ① Montrer que $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$
- ② En déduire le vecteur vitesse en coordonnées polaires.

Solution

- ① En projetant dans la base cartésienne :

$$\vec{e}_r = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{vmatrix}_{\text{cart}} \quad \vec{e}_\theta = \begin{vmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{vmatrix}_{\text{cart}}$$

D'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_r}{dt} &= \left. \begin{array}{l} -\dot{\theta} \sin(\theta) \\ \dot{\theta} \cos(\theta) \end{array} \right|_{\text{cart}} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} &= \left. \begin{array}{l} -\dot{\theta} \sin(\theta) \\ -\dot{\theta} \cos(\theta) \end{array} \right|_{\text{cart}} = -\dot{\theta} \vec{e}_r \end{aligned}$$

Nous rappelons la formule de dérivée d'une fonction composée : $[f(g(t))]' = g'(t)f'(g(t))$.

②

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{OM}}{dt} \\ &= \frac{dr\vec{e}_r}{dt} \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Application 3 : Accélération en coordonnées polaires

Énoncé Démontrer l'expression de l'accélération en coordonnées polaire à partir de l'expression de la vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Solution

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \\ &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \\ &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta \\ &= \left. \begin{array}{l} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{array} \right|_{\text{pol}} \end{aligned}$$

Application 4 : Orbite circulaire

Énoncé Soit un satellite en orbite circulaire autour de la Terre de rayon R . Le mouvement est plan, nous nous placerons donc dans la base cartésienne : $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ de centre O correspondant au centre de la Terre.

Nous supposons que le satellite se comporte comme une masse ponctuelle concentrée en son centre de gravité noté M .

Nous notons h l'altitude du satellite depuis la surface de la Terre, de telle sorte que $R = R_T + h$.

Données : $R_T = 6400 \text{ km}$ le rayon de la Terre, $M_T = 6,00 \times 10^{24} \text{ kg}$ la masse de la Terre et $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$ la constante de gravitation universelle.

① Dans quel référentiel est-il astucieux de travailler ?

② Quel est le repère le plus pratique pour étudier les mouve-

ments de rotation ? Représenter le sur un schéma. Rappeler l'expression de la vitesse et de l'accélération dans ce repère.

③ Montrer que, pour une trajectoire circulaire, le mouvement est uniforme en appliquant le principe fondamental de la dynamique.

④ En déduire la période de révolution du satellite T . Au passage démontrer la troisième loi de *Kepler* dans le cas d'une trajectoire circulaire.

Nous supposons, pour la question suivante, le satellite en orbite basse, de telle sorte que $h \ll R_T \Leftrightarrow R \simeq R_T$.

⑤ Calculer la période de révolution T .

Nous supposons maintenant que le satellite est géostationnaire.

⑥ Définir le mot géostationnaire.

⑦ Déterminer R et h pour un satellite géostationnaire.

Solution

① Nous utilisons le référentiel géocentrique lié au centre de la Terre et pointant vers trois étoiles lointaines.

② Nous utilisons le système de coordonnées polaire car le mouvement est circulaire et plan.

③ Faire schéma.

Syst : satellite M de masse m

Référentiel et repère déjà définis.

Bilan des actions mécaniques : force de gravitation : $F_{T \rightarrow M} = -G \frac{M_T m}{R^2} \vec{e}_r$

Nous appliquons le PDF :

$$m \vec{a} = -G \frac{M_T m}{R^2} \vec{e}_r$$

$$\text{or } \vec{a} \underset{r=R=C_{ste}}{=} -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\text{d'où } \left. \begin{array}{c} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \end{array} \right|_{\text{pol}} = \left. \begin{array}{c} -G \frac{M_T}{R^2} \\ 0 \end{array} \right|_{\text{pol}}$$

La projection sur $\vec{e}_\theta$ nous donne que $\dot{\theta} = C^{ste}$. Donc la vitesse $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ est de norme constante, le mouvement est donc uniforme.

△ Ne pas confondre uniforme et vecteur vitesse constante. Ici le vecteur vitesse n'est pas constant puisque sa direction varie au cours du temps. En revanche sa norme est constante.

④ La projection sur $\vec{e}_r$ nous donne :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{GM_T}{R^3}$$

Or la vitesse est la distance parcourue pour faire un tour divisée par la période :

$$v = R\dot{\theta} = \frac{2\pi R}{T}$$

En injectant dans la relation précédente :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM_T}{R^3}$$

D'où

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \text{3ème loi de Kepler}$$

et

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$$

⑤ A.N. $T = 5085 \text{ s} = 1 \text{ h}24$

⑥ Le satellite est dit géostationnaire s'il observe toujours la même zone de la Terre. Il a donc la même période de révolution.

⑦

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$$

A.N

$$R = 42\,300 \text{ km}$$

et

$$h = 35\,900 \text{ km}$$