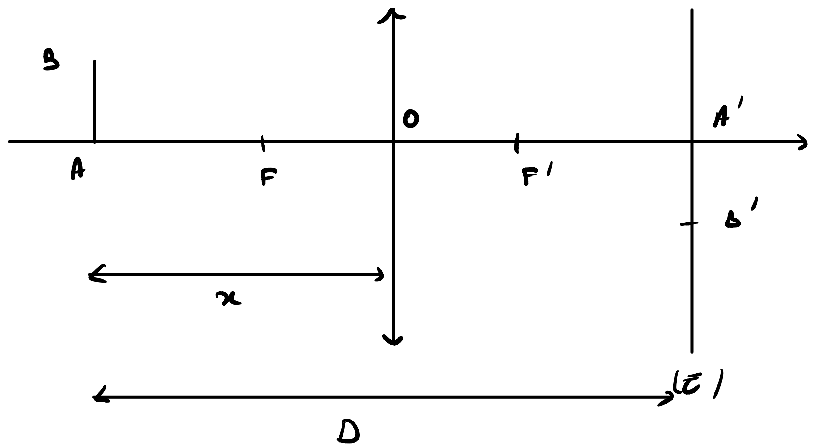
DM 4 - Correction -

Exercice 1 - Bessel

1



D'après la relation de conjugaison de Descartes (RCD)

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{où} \quad f' = \overline{OF'}.$$

or $\overline{OA} = -x$ et $\overline{OA'} = D - x$

donc $\frac{1}{D-x} - \frac{1}{-x} = \frac{1}{f'} \iff \frac{D}{(D-x)x} = \frac{1}{f'}$

$\iff Df' = Dx - x^2 \iff \boxed{x^2 - Dx + Df' = 0}$

Ce polynome d'ordre 2 admet des solutions réelles

ssi $\Delta \geq 0 \iff D^2 - 4Df' \geq 0 \iff \boxed{D \geq 4f'}$

L'image peut-être nette ssi $\boxed{D \geq 4f'}$

2 La résolution du polynome précédent donne x_1 et x_2

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{D \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{D}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4Df'}}$$

3 $d = |x_1 - x_2| = \left| \cancel{\frac{D}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4Df'} - \cancel{\frac{D}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4Df'} \right|$

$\iff d = \sqrt{D^2 - 4Df'}$ au carré

$\iff d^2 = D^2 - 4Df'$

$\iff \boxed{f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}}$

4 A.N. $f' = \frac{60{,}0^2 - 34{,}6^2}{4 \times 60{,}0} = 10{,}0$ cm (3 C.S.)

5 $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{D-x}{-x} = -\frac{D}{x} + 1$

$x = \frac{D}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D^2 - 4Df'} = \frac{D}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4f'/D}\right)$

d'où $\boxed{\gamma_{1,2} = \frac{-2}{1 \pm \sqrt{1 - 4f'/D}} + 1 = -\frac{1 \mp \sqrt{1 - 4f'/D}}{1 \pm \sqrt{1 - 4f'/D}}}$

Soit γ_1 le grandissement pour la position 1.

$$\gamma_1 = -\frac{1 - \sqrt{1 - 4f'/D}}{1 + \sqrt{1 - 4f'/D}}$$

De même $\gamma_2 = -\dfrac{1+\sqrt{1-4P'/D}}{1-\sqrt{1-4P'/D}}$

A.N. $\gamma_1 = -0,27$ pour la distance la ⊕ éloignée.

$\gamma_2 = -3,73$ pour la position la ⊕ proche

Plus l'objet et la lentille sont proche plus l'image est agrandie.

Exercice 2. Ba / Ba^{2+}

$\boxed{1}$ $Q = \dfrac{[Ba^{2+}][HO^-]^2}{1 \; c^{\circ 3}}$

$Ba(OH)_2$ est solide.

$[Ba^{2+}] = 0 \text{ mol.L}^{-1}$

$[HO^-] = 0 \text{ mol.L}^{-1}$

A.N. $Q = 0$

$Q < K^\circ$ donc la réaction se fait dans le sens direct.

$\boxed{2}$ T.A.

	n	$Ba(OH)_{2(s)}$	=	$Ba^{2+}_{(aq)}$	$+ \; 2\,HO^-_{(aq)}$
$\xi = 0$		n_0		0	0
ξ		$n_0 - \xi$		ξ	2ξ
ξ_F		$n_0 - \xi_F$		ξ_F	$2\xi_F$

$Q = \dfrac{[Ba^{2+}][HO^-]^2}{c^{\circ 3}} = \dfrac{\frac{\xi}{V} \times \left(\frac{2\xi}{V}\right)^2}{c^\circ}$

$\boxed{Q = \dfrac{4\xi^3}{V^3 c^{\circ 3}}}$

P3

3 à l'équilibre $Q = K^0$

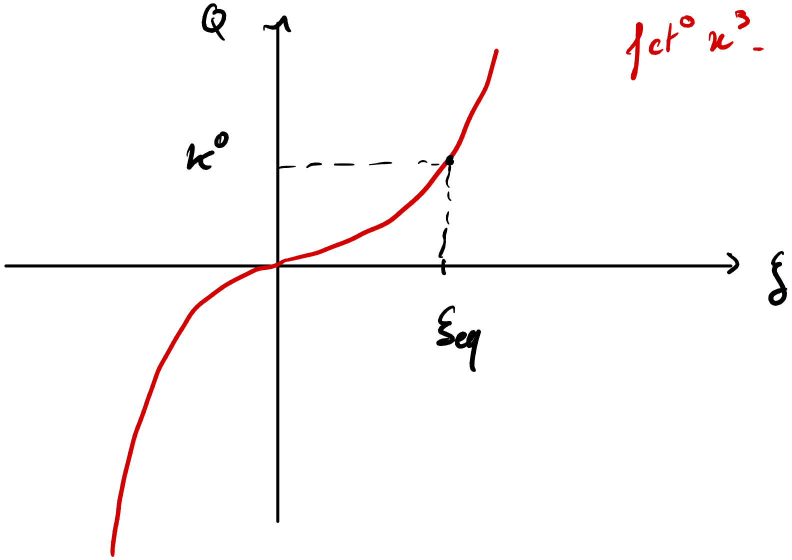
$$\Leftrightarrow \frac{4\xi_{eq}^3}{V^3 C^{o3}} = K^0 \Leftrightarrow \xi_{eq} = C^0 V \sqrt[3]{\frac{K^0}{4}}$$

A.N. $\xi_{eq} = 1 \times 1 \sqrt[3]{\frac{4 \times 10^{-3}}{4}}$

$\xi_{eq} = 1{,}0\ 10^{-1}$ mol

Or $n_0 > \xi_{eq}$ donc tout le réactif n'est pas consommé. $\boxed{\xi_F = 1{,}0 \times 10^{-1} \text{ mol}}$

4



5 À l'état final

$n_{Ba(OH)_2} = n_0 - \xi_F = 1{,}0 \times 10^{-1}$ mol

$n_{Ba^{2+}} = \xi_F = 1{,}0 \times 10^{-1}$ mol

$n_{HO^-} = 2\xi_F = 2{,}0 \times 10^{-1}$ mol

6 Δ $n_0 = 5 \times 10^{-2}$ mol donc $n_0 < \xi_{eq}$

Il y a rupture d'équilibre, le réactif est totalement consommé : $\boxed{\xi_F = n_0}$ la réaction est totale.

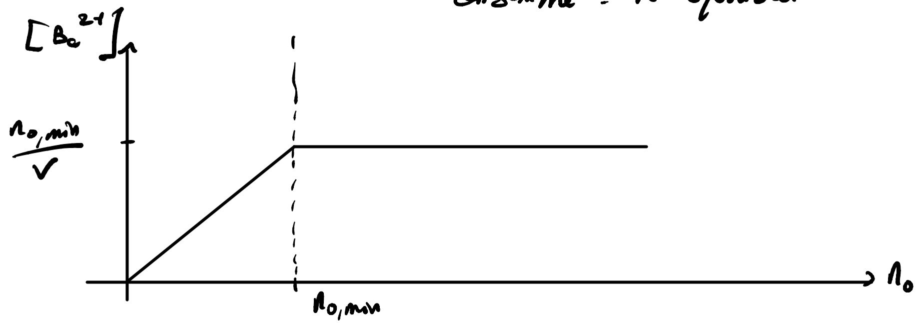
$\xi_F = 5 \times 10^{-2}$ mol

7 $\boxed{n_{0,min} = \xi_{eq}} = 1{,}0 \times 10^{-1}$ mol.

si $n_0 < n_{0,min}$ le réactif est totalement consommé : R° totale

si $n_0 > n_{0,min}$ le réactif n'est pas totalement consommé : R° équilibrée

8



P3

$[B_a^{2+}] = \xi_F / V$

- si $n_0 < n_{0,min}$: $\xi_F = n_0$: R° totale

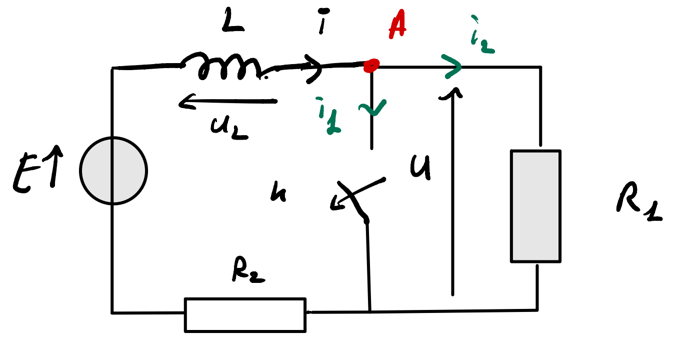
$\Leftrightarrow [B_a^{2+}] = \frac{n_0}{V}$: la courbe est une droite linéaire de pente $\frac{1}{V}$.

- si $n_0 > n_{0,min}$: $\xi_F = \xi_{eq} = n_{0,min}$: R° équilibrée

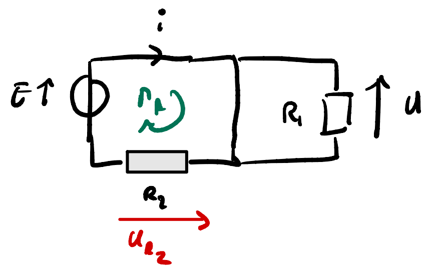
$[B_a^{2+}] = \frac{n_{0,min}}{V} = c^{ste}$ la courbe est une droite horizontale.

p4

Exercice 3 - Surtension inductive.



1 Schéma équivalent en régime permanent

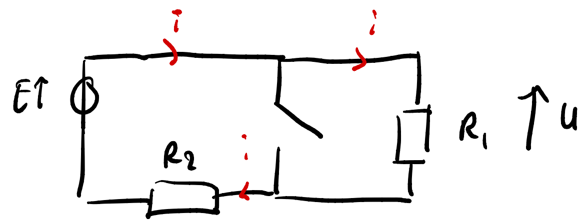


$\boxed{u = 0}$ car aux bornes d'un fil

- $u_{R_2} = R_2 i \Leftrightarrow i = \frac{u_{R_2}}{R_2}$
- LM sur Π_A : $E = u_{R_2}$

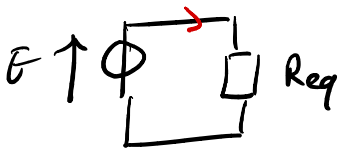
$\Bigg\} \Leftrightarrow \boxed{i = \frac{E}{R_2}}$

2 Schéma équivalent



tout le courant passe dans la branche de droite.

Le circuit est équivalent à :



avec $R_{eq} = R_1 + R_2$

La tension aux bornes de R_{eq} est E, d'après la loi d'Ohm $E = (R_1+R_2)\, i_\infty \Leftrightarrow \boxed{i_\infty = \frac{E}{R_1+R_2}}$

$$\boxed{u_\infty = R_1\, i_\infty = \frac{R_1}{R_1+R_2} E}$$

loi d'ohm.

Rq Sans le guidage de l'énoncé, nous aurions plutôt pensé à faire un PDT pour $u_\infty = \frac{R_1}{R_1+R_2} E$ pour ensuite en déduire i_∞ à l'aide de la loi d'ohm.

3 Le courant qui traverse une bobine est continu

donc $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = i_0 = \frac{E}{R_2}}$

$$u(0^+) = R_1\, i(0^+) = \frac{R_1}{R_2} E \neq u(0^-) = u_0 = 0$$

La tension aux bornes de l'interrupteur est discontinue à $t=0$.

4 Si l'on enlève la résistance R_1, le courant ne peut plus passer dans cette partie du circuit, c'est comme si la résistance était infinie.

si $R_1 \to +\infty$, $u(0^+) \to +\infty$

La tension ne peut pas être infinie. Au-delà d'une certaine valeur, l'air s'ionise et une étincelle se forme.

c'est ce qu'on appelle la tension de claquage de l'air

Cette étincelle assure la continuité du courant électrique.

5 à $t \geq 0$.

LM $\left.\begin{aligned} E &= u_L + u + u_{R_2} \\ &= L\frac{di}{dt} + R_1 i + R_2 i \end{aligned}\right\}$ L.C.

$$\Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{(R_1+R_2)}{L} i = \frac{E}{L}$$

p6

posons $\tau = \dfrac{L}{R_1 + R_2}$

On reconnait une équation différentielle d'ordre 1 donc la solution est

$$i(t) = k \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{\tau E}{L}$$

à $t=0$ $\quad i(0) = i_0 = \dfrac{E}{R_2} = k + \dfrac{E}{R_1+R_2}$

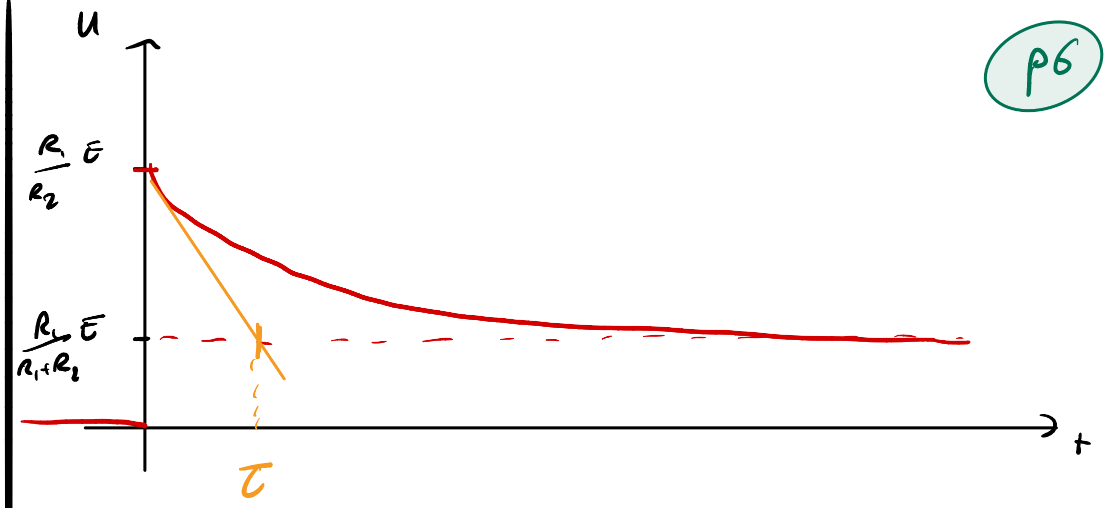
$$\Leftrightarrow \quad k = E\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1+R_2}\right) = E\,\frac{R_1}{R_2(R_1+R_2)}$$

au final

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R_1+R_2}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

6 $\quad u(t) = R_1\, i(t)$

$$\boxed{u(t) = \frac{R_1}{R_1+R_2}\, E\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$



p6