TD M1 | Mécanique

# Cinématique du point matériel

exercice sera corrigé en TD ;
exercice classique / important ; à maîtriser pour les concours ;
niveau de difficulté de l'exercice.

**Parcours d'entrainement :**

| | |
|---|---|
| à modifier Je suis à l'aise avec le chapitre | Exercices 1, 2, 4, 7, 8, 10 |
| Je ne suis pas à l'aise | Exercices 1, 2, 3, 4, 7 |

Les exercices issus du *cahier d'entrainement* sont à retrouver :

Vous pouvez l'utiliser pour faire le section 10 qui correspond à la cinématique.

## Vecteurs et projections

### Exercice 1 : Orientation d'un repères

*d'après M. Melzani*

1 Pour chaque repère de la figure ci-dessous, dire si la base directe ou non.

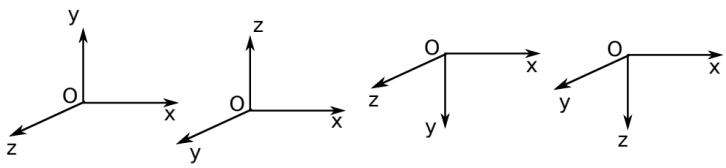
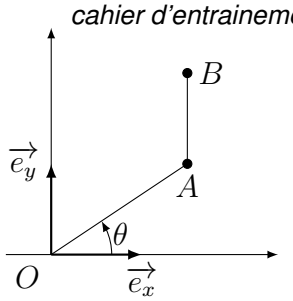



FIGURE 1 – Repères

## Exercice 2 : Projections de vecteurs

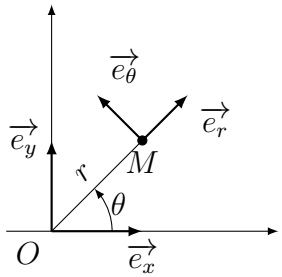
*cahier d'entrainement*




Les méthodes de projection sont rappelées sur la fiche outil 5.
On considère deux points A et B tels que la droite (AB) est parallèle à la droite $(Oy)$. Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ fait un angle $\theta$ avec l'axe $(Ox)$.
Exprimer les composantes des vecteurs suivants dans le repère $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ en fonction de $a = ||\overrightarrow{OA}||$, $b = ||\overrightarrow{AB}||$ et de l'angle $\theta$.

1. $\overrightarrow{OA}$
2. $\overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{OB}$
4. $\overrightarrow{OA}$ + $\overrightarrow{OB}$
5. $\overrightarrow{OA}$ - $\overrightarrow{OB}$
6. -$\overrightarrow{OA}$ + $\overrightarrow{OB}$

## Exercice 3 : Base polaire

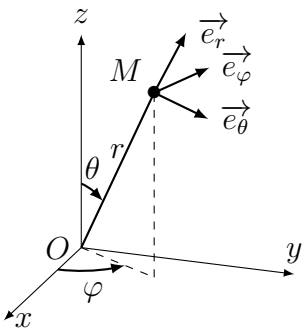



Nous considérons la base polaire $\mathcal{B}_p = (\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ liée à un point mobile $M$ comme représentée sur la figure ci-contre.
On note $r = ||\overrightarrow{OM}||$ la distance de $O$,le point fixe du référentiel, à $M$. Exprimer les vecteurs suivants dans la base demandée en fonction de $r$ et $\theta$.
Nous notons la base cartésienne $\mathcal{B}_c = (\vec{e_x}, \vec{e_y})$.

1. $\vec{e_r}$ dans la base $\mathcal{B}_c$.
2. $\vec{e_\theta}$ dans la base $\mathcal{B}_c$.
3. $\vec{e_x}$ dans la base $\mathcal{B}_p$.
4. $\vec{e_y}$ dans la base $\mathcal{B}_p$.
5. $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathcal{B}_p$.
6. $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathcal{B}_c$.

## Exercice 4 : Base sphérique

La base sphérique $\mathcal{B}_s = (\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ est définie comme sur la figure ci-contre, attachée à la position du point $M$. Nous notons $r = ||\overrightarrow{OM}||$ la distance de $O$, un point fixe du référentiel, à $M$.
Exprimer chaque vecteur dans la base demandée en fonction de $r$, $\theta$ et $\phi$.
Nous notons $\mathcal{B}_c = (\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ la base cartésienne.




1 $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathcal{B}_s$.
2 $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathcal{B}_c$. Aide : vous pouvez commencer par donner la projection de $M$ sur dans le plan $Oxy$.
3 Exprimer chaque vecteur de la base sphérique dans la base cartésienne. (Astuce : faites de représentation dans des plans)
4 Exprimer chaque vecteur de la base cartésienne dans la base sphérique.

## Exercice 5 : Projections

*d'après M. Melzani*

1 Dans chaque cas de la figure 2, projeter le vecteur $\vec{g}$ ou $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$.

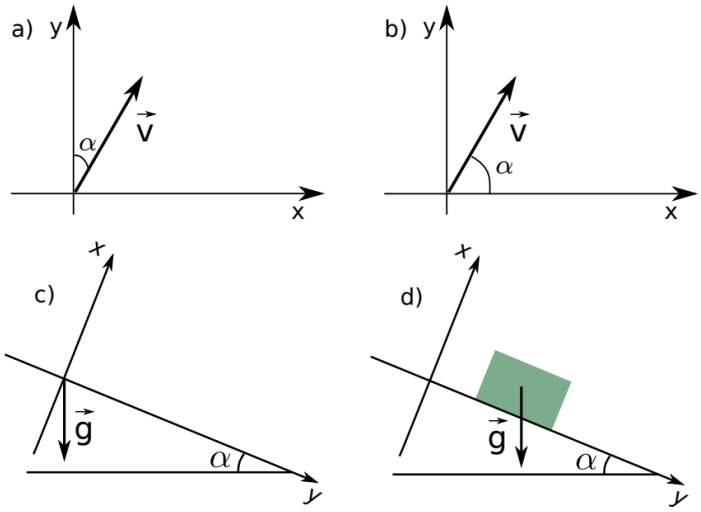



FIGURE 2 – Repères

## Cinématique

## Exercice 6 : Ballon sonde

*d'après M. Melzani et E. Thibierge*

On modélise un ballon sonde par un point matériel de coordonnées $(x(t), z(t))$. Le ballon est lâché depuis le point $O$ à l'instant $t = 0$.

Il acquiert quasi-instantanément une vitesse verticale $v_0$ qui demeure constante tout au long du mouvement.

Le vent lui communique une vitesse horizontale $v_x > 0$, orientée suivant l'axe $(Ox)$, et proportionnelle à son altitude $z > 0$ mesurée par rapport au niveau du sol : $v_x = z/\tau$ où $\tau > 0$ est homogène à un temps.

1 Écrire et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

2 Écrire et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, à exprimer en fonction de $v_0$ et $\tau$.

3 En déduire l'équation $z(x)$ de la trajectoire du ballon sonde.

4 Représenter cette trajectoire, et représenter le vecteur vitesse du ballon sonde à trois instants différents.

5 Exprimer les composantes de l'accélération du ballon sonde.

6 On donne $v_0 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $\tau = 100\,\mathrm{s}$. Combien de temps le ballon met-il pour atteindre une altitude de 1 km ? De quelle distance horizontale s'est-il alors déplacé ?

## Exercice 7 : Course de voiture commandée

*d'après E. Thibierge*

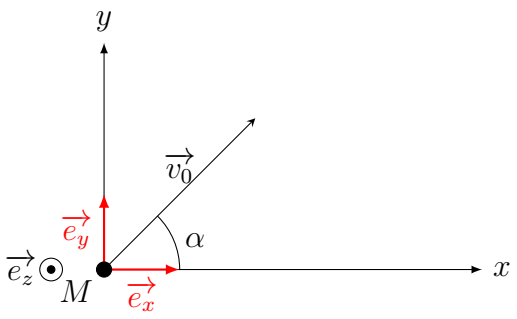
François et Coline comparent les performances des voitures télécommandées que le Père Noël leur a apporté. La voiture de François a une accélération de 2 m/s$^2$ alors que celle de Coline accélère à 3 m/s$^2$. Cependant, la voiture de François peut atteindre 12 km h$^{-1}$ alors que celle de Coline plafonne à 10 km h$^{-1}$

1 Qui gagne la course dans l'allée du jardin, longue de $d = 15\,\mathrm{m}$ ?

2 Grand prince, le gagnant accorde une revanche à son malheureux adversaire et lui laisse même choisir la distance de la course. Quelle distance le perdant doit-il proposer pour être sûr de gagner ?

## Exercice 8 : Trajectoire balistique

Nous lançons une balle de masse $m$ avec une vitesse initiale comme sur le schéma ci-dessous. La balle est initialement à l'origine du repère. Nous négligeons les frottements de l'air.




Comme toutes les forces s'exercent dans le plan (Oxy) et que la vitesse initiale est également dans ce plan, nous pouvons en déduire que le mouvement se fait dans le plan (Oxy).

Nous pouvons montrer que l'accélération $\overrightarrow{a}(t) = a_x(t)\overrightarrow{e_x} + a_y(t)\overrightarrow{e_y} + a_z(t)\overrightarrow{e_z}$, répond au système d'équation suivant :

$$a_x(t) = 0$$
$$a_y(t) = -g$$
$$a_z(t) = 0$$

où $g$ est l'accélération de pesanteur, une constante.

1. Déterminer les équations différentielles pour $x(t)$, $y(t)$.
2. En déduire : $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$. En déduire le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$.
3. Le mouvement est-il uniforme ?
4. En déduire : $x(t)$, $y(t)$.
5. En déduire la trajectoire $y(x)$.
6. Déterminer la flèche de la trajectoire, c'est-à-dire le point culminant de la trajectoire.
7. Pour quelle valeur de $\alpha$ la flèche est maximale ?
8. Déterminer la portée (distance maximale à laquelle la balle touche le sol).
9. Pour quelle valeur de $\alpha$ la balle atteint-elle une distance maximale ? Déterminer cette distance.

**Avec python**

## Exercice 9 : Les quatre mouches

Quatre mouches sont positionnées sur un carré de côté $2a$. Chaque mouche suit la mouche suivante à la vitesse $v_0$ constante.

À l'aide d'un programme python, déterminer la trajectoire des 4 mouches.

Aides :

- exprimer le vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ donnant la direction d'une mouche à tout instant ;
- par discrétisation exprimer la position de la mouche à l'instant suivant en fonction de $v_0$, du vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, de l'intervalle de temps numérique $dt$ et de la position à l'instant précédent ;

Idées pour aller plus loin :

1. votre programme peut gérer un nombre quelconque de mouches (aller de 2 à 10 pour les tests) ;
2. la vitesse dépend de la distance à la mouche cible en $(2a)^2/r^2$ ;
3. la mouche cible la mouche la plus proche d'elle (elle peut donc changer de cible au cours du temps) ;
4. la position des mouches initiale est aléatoire ;
5. chaque mouche à sa propre vitesse comprise en $[v0 - \varepsilon, v_0 + \varepsilon]$ ;
6. etc ... le champ des possible est sans limite.