- Exercice 6 -

1 • Toutes les contraintes (poids) et les conditions initiales sont contenues dans le plan (O, x, y) donc le système est contraint à rester dans ce plan.

2 <u>syst</u> : M de masse m
<u>ref</u> : terrestre, supposé galilien
<u>BAME</u> : poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_y}$
nous négligeons les frottements de l'air.
<u>coord</u> cart
<u>PFD</u> : $m\vec{a} = -mg\,\vec{e_y}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}}$$

3 Par intégration

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_2 \end{cases} \quad \text{avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

à $t=0$ $\quad \vec{v_0} = \begin{vmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ v_0 \sin(\alpha) \end{vmatrix}$

d'où $\begin{cases} C_1 = v_0 \cos(\alpha) \\ C_2 = v_0 \sin(\alpha) \end{cases}$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\,\vec{e_x} + \dot{y}\,\vec{e_y} = \begin{vmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ -gt + v_0 \sin(\alpha) \end{vmatrix}}$$

4 Par intégration

$$\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha)\, t + C_3 \\ y = -g\dfrac{t^2}{2} + v_0 \sin(\alpha)\, t + C_4 \end{cases} \quad \text{avec } (C_3, C_4) \in \mathbb{R}^2$$

on à $t=0$ $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases}$

au final $\boxed{\vec{OM} = x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y} = \left| \begin{array}{l} v_0 \cos(\alpha) t \\ -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin(\alpha) t \end{array} \right.}$

5 $t = \dfrac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$

d'où $y = -g \dfrac{x^2}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} + \dfrac{\cancel{v_0} \sin(\alpha)\, x}{\cancel{v_0} \cos(\alpha)}$

$$\boxed{y(x) = \frac{-g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha)\, x}$$

6 on cherche le point où la dérivée s'annule

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cancel{2}g}{\cancel{2} v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_f + \tan(\alpha) = 0$$

$\iff$ $\boxed{x_f = \dfrac{v_0^2 \cos^2(\alpha) \tan(\alpha)}{g} = \dfrac{v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g}}$

position de la flèche.

7 $\dfrac{d x_f}{d\alpha} = \dfrac{v_0^2}{g} \left(\cos(\alpha)^2 - \sin^2(\alpha) \right)$

$= v_0^2/g \left(\cos^2(\alpha) - (1 - \cos^2(\alpha)) \right)$

$$= \frac{v_0^2}{g} \left(2\cos^2(\alpha) - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \pm \pi/4$$ seule la valeur $+\pi/4$ a un sens physique

$\boxed{8}$ on cherche le point tel que

$$y(x_p) = 0$$

$$\tan(\alpha) \cancel{x_p} = \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_p^{\cancel{2}}$$

$$\boxed{x_p = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos^2(\alpha) \tan(\alpha) = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos(\alpha) \tan(\alpha) = 2 x_f .}$$

$\boxed{9}$ Comme pour la flèche, la portée maximale est atteinte pour $\alpha = \pi/4$

$$\boxed{x_p(\alpha = \pi/4) = \frac{\cancel{2} v_0^2}{g} \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{2}}$$

$$\left(\text{et } x_f(\alpha = \pi/4) = \frac{v_0^2}{g} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) .$$