E3 | Électrocinétique

Oscillateur harmonique électrocinétique

Prérequis

Circuits électrocinétiques	Chapitre E1 et E2
LM, LN, PDT	Chapitre E1 et E2
Méthode mise en équation d'un circuit électrocinétiques	Chapitre E1 et E2
Notion mathématique : dérivées, intégrales, résolution d'ED	FO6 et FO7
Notion mathématique : trigonométrie	FO4

I Signal harmonique

I.A Définition

À connaitre

Connaitre et identifier :

- un signal harmonique ;
- une équation différentielle harmonique ;
- un signal harmonique est solution d'une équation différentielle harmonique ;

I.B Résoudre une équation différentielle harmonique

Savoir-faire

Méthode de résolution d'une équation différentielle d'ordre 2 (sans terme d'amortissement).

II Oscillateur harmonique électrocinétique

II.A Oscillateur en régime libre

À connaitre

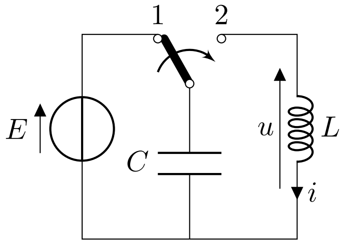
Définition du régime libre

Savoir-faire

- Déterminer l'équation différentielle d'un circuit électrique ;
- la résoudre dans le cas harmonique ;

Application 1 : Circuit LC en régime libre

Énoncé Soit le circuit ci-dessous. À l'instant initial, nous basculons l'interrupteur de la position 1 à la position 2.



1 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par u après que l'interrupteur est basculé dans la position 2. Quel est l'ordre de cette équation différentielle ? Combien de conditions sont nécessaires pour la résoudre complètement ?
2 Que vaut la tension u juste avant la fermeture de l'interrupteur $u(0^-)$? En déduire $u(0^+)$.
3 Que vaut le courant i juste avant la fermeture de l'interrupteur $i(0^-)$? En déduire $i(0^+)$.
4 Résoudre l'équation différentielle portant sur u. En déduire i.
5 Tracé u et i en fonction du temps.

Solution
1 Loi de comportement de la bobine et du condensateur :

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad i = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Remarque : attention à la convention du condensateur.
Nous combinons c'est deux équations :

$$u = L\frac{\mathrm{d}\left(-C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t}$$

$$\ddot{u} + \frac{1}{LC}u = 0$$

Nous posons $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ pour mettre cette équation sous forme canonique :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

2 à $t < 0$, dans la maille de gauche $u(t) = E$, d'où $u(0^-) = E$. Par continuité de la tension aux bornes du condensateur : $u(0^+) = u(0^-) = E$.
3 à $t < 0$, l'interrupteur étant ouvert, le courant qui circule est nul : $i(0^-) = 0$. Donc, par continuité du courant qui traverse une bobine : $i(0^+) = i(0^-) = 0$.
4 L'équation différentielle sur la tension est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique dont la solution est :

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Déterminons les constantes d'intégration A et B à l'aide des conditions initiales :

$$u(0) = A = E$$

$$i(t) = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = +CE\omega_0\sin(\omega t) - CB\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

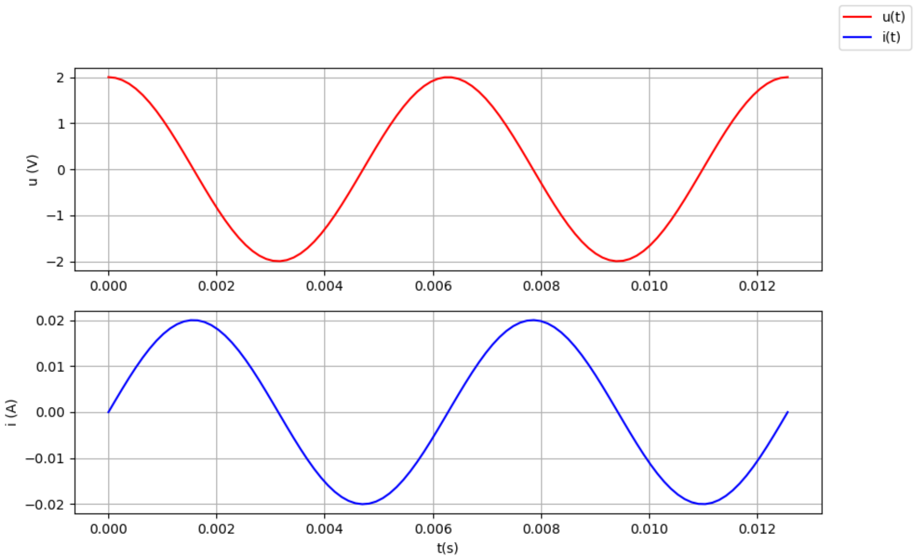
$$i(0) = CB\omega_0 = 0 \Leftrightarrow B = 0$$

Au final :

$$u(t) = E\cos(\omega_0 t)$$
$$i(t) = CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

Remarque : nous avons choisi ici la forme $u(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ plutôt que la forme $u(t) = U_0\cos(\omega t + \varphi_0)$. Cette seconde convention est plus utile quand on a des informations sur la périodicité du signal.

5



Tracé pour $E = 2$ V, $C = 10 \times 10^{-6}$ F et $L = 100 \times 10^{-3}$ H.

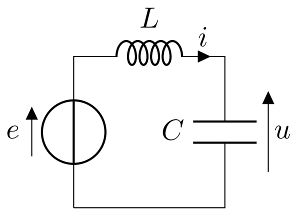
II.B Oscillateur en régime forcé constant

À connaitre

Définition du régime forcée

Application 2 : Circuit LC en régime forcé

Énoncé Soit le circuit ci-dessous. À l'instant initial le condensateur



Alors que la tension délivrée par le générateur vaut $e = 0$ V depuis longtemps, nous la basculons sur la tension constante E à $t = 0$.

1 Que vaut la tension u juste avant la fermeture de l'interrupteur $u(0^-)$? En déduire $u(0^+)$.

2 Que vaut le courant i juste avant la fermeture de l'interrupteur $i(0^-)$? En déduire $i(0^+)$.

3 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par u pour $t \geq 0$.

4 Résoudre l'équation différentielle portant sur u. En déduire i.

5 Tracé u et i en fonction du temps. Superposer à votre courbe la tension du générateur au cours du temps.

Solution

1 Faire le schéma équivalent en régime permanent à $t < 0$. La bobine est un fil, le condensateur un interrupteur ouvert. On en déduit $i(0^-) = 0$ et $u(0^-) = 0$. Par continuité, nous avons $i(0^+) = 0$ et $u(0^+) = 0$

2 Voir question précédente.

3 Loi des mailles + lois de comportement :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

4 Je reconnais une équation différentielle harmonique forcée Solution homogène + solution particulière :

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + E$$

Déterminer A et B les constantes d'intégration.

$$u(0) = 0 = A + E \Leftrightarrow A = -E$$
$$i(0) = B\omega_0 = 0 \Leftrightarrow B = 0$$

Finalement :

$$u(t) = E\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right)$$
$$i(t) = -CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

5 Faire le tracé.