E3 | Électrocinétique

Circuits linéaires du deuxième ordre : l'oscillateur harmonique

Prérequis

Circuits électrocinétiques	Chapitre E1 et E2
LM, LN, PDT	Chapitre E1 et E2
Méthode mise en équation d'un circuit électrocinétiques	Chapitre E1 et E2
Notions énergétiques des circuits	Chapitre E1 et E2
Notion mathématique : dérivées, intégrales, résolution d'ED	FO7
Notion mathématique : trigonométrie	FO5

Plan

I. Signal harmonique

I.A. Définition

I.B. Équation différentielle harmonique

I.C. Stabilité des équations différentielles

II. Oscillateur harmonique (électrocinétique)

III. Étude énergétique d'un oscillateur harmonique

Savoirs

- Signal harmonique : $s(t) = s_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega t)$ — I
- Équation différentielle harmonique : $\ddot{s(t)} + \omega_0^2 s(t) = 0$ — I
- Les équations différentielles d'ordre 1 et 2 sont stables ssi les coefficients sont de même signe. — I

Savoir-Faire

- Identifier une équation différentielle harmonique et exprimer la fréquence propre ω_0 en fonction des grandeurs du système — I
- Mettre en équation un circuit électrocinétiques du 1e ordre sans résistance — II
- Connaitre la solution dans le cas d'un oscillateur harmonique — II
- Réaliser un bilan d'énergie sur un circuit électrocinétique du 2e ordre sans résistance — III

Application 1 : Solution d'une équation différentielle harmonique

Énoncé Montrer que $s(t) = s_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$ est solution d'une équation différentielle harmonique :

$$\ddot{s(t)} + \omega_0^2 s(t) = 0$$

Solution Dérivons s :

$$\dot{s} = -\omega_0 s_0 \sin(\omega t + \phi)$$
$$\ddot{s} = -\omega_0^2 s_0 \cos(\omega t + \phi)$$

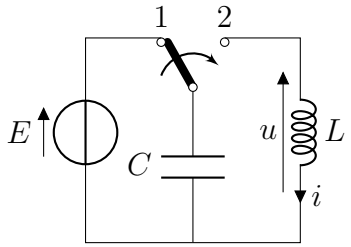
Nous remplaçons dans l'équation différentielle :

$$-\omega_0^2 s_0 \cos(\omega t + \phi) + \omega_0^2 s_0 \cos(\omega_0 t + \phi) = 0$$

Donc s est bien solution de l'ED.

Application 2 : Circuit LC

Énoncé Soit le circuit ci-dessous. À l'instant initial, nous basculons l'interrupteur de la position 1 à la position 2.



1 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par u $\forall t > 0$. Quel est l'ordre de cette équation différentielle ? Combien de conditions sont nécessaires pour la résoudre complètement ?
2 Que vaut la tension u juste avant la fermeture de l'interrupteur $u(0^-)$? En déduire $u(0^+)$.
3 Que vaut le courant i juste avant la fermeture de l'interrupteur $i(0^-)$? En déduire $i(0^+)$.
4 Résoudre l'équation différentielle portant sur u. En déduire i.
5 Tracé u et i en fonction du temps.

Solution
1 Loi de comportement de la bobine :

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Or le condensateur à la même tension à ses bornes que la bobine, mais en convention générateur, donc :

$$i = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Nous injectons cette dernière équation dans la précédente :

$$u = L\frac{\mathrm{d}\left(-C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t}$$
$$\ddot{u} + \frac{1}{LC}u = 0$$

Nous posons $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ pour mettre cette équation sous forme canonique :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

2 à $t < 0$, dans la maille de gauche $u(t) = E$, d'où $u(O^-) = E$. Par continuité de la tension aux bornes du condensateur : $u(0^+) = u(0^-) = E$.
3 à $t < 0$, l'interrupteur étant ouvert, le courant qui circule est nul : $i(0^-) = 0$. Donc, par continuité du courant qui traverse une bobine : $i(0^+) = i(0^-) = 0$.
4 L'équation différentielle sur la tension est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique dont la solution est :

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Déterminons les constantes d'intégration A et B à l'aide des conditions initiales :

$$u(0) = A = E$$

$$i(t) = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = +CE\omega_0 \sin(\omega t) - CB\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

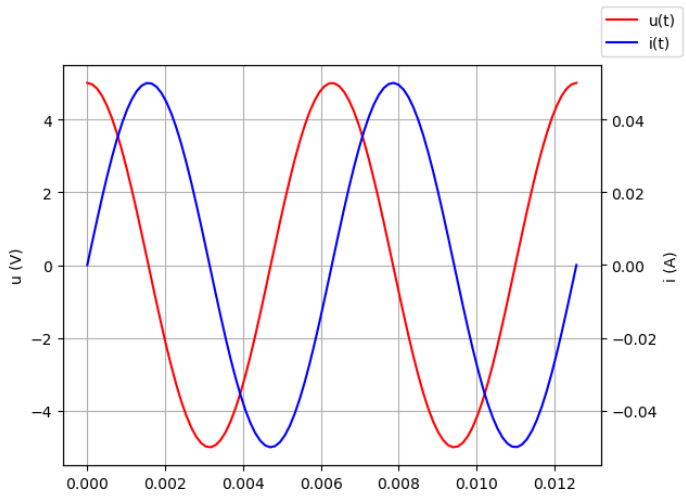
$$i(0) = CB\omega_0 = 0 \Leftrightarrow B = 0$$

Au final :

$$u(t) = E\cos(\omega_0 t)$$

Remarque : nous avons choisi ici la convention $u(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ plutôt que la convention $u(t) = U_0\cos(\omega t + \varphi_0)$. Cette seconde convention est plus utile quand on a des informations sur la périodicité du signal.

5



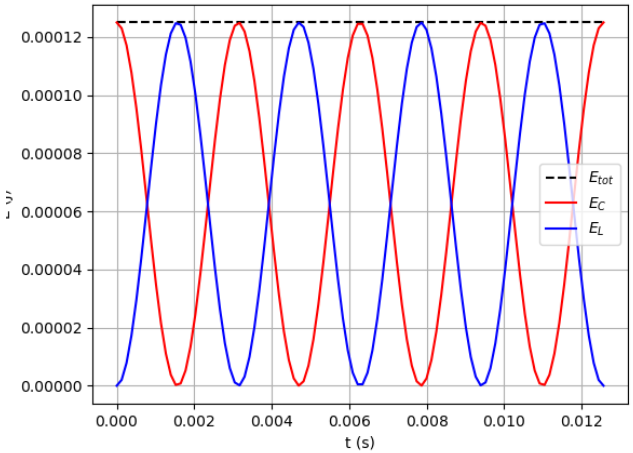
Application 3 : Bilan d'énergie sur la charge d'un circuit LC

Énoncé Nous considérons le même circuit qu'à l'application 2. Nous donnons $u(t) = E\cos(\omega_0 t)$.

1 Montrer que l'énergie est conservée.

Solution

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{tot}} &= \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L \\
&= \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2 \\
&= \frac{1}{2}C\left(E\cos(\omega_0 t)\right)^2 + \frac{1}{2}L\left(-CE\omega_0\sin(\omega_0 t)\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}CE^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}LC^2E^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) \\
&= \frac{1}{2}CE^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}CE^2\sin^2(\omega_0 t) \\
&= \frac{1}{2}CE^2\left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right) \\
&= \frac{1}{2}CE^2 = C^{ste}
\end{aligned}$$



Remarque : la fréquence est doublée pour l'énergie, cela vient du fait que l'énergie est le produit de la tension par le courant.