TD M3 | Mécanique

Coordonnées polaire et cylindrique

- exercice à préparer à la maison avant le TD ;
- exercice classique / important ; à maîtriser pour les concours ;
- niveau de difficulté de l’exercice.

Maîtriser son cours

Exercice 1 : Paramétrage d’un problème

M. Melzani

Nous considèrons le mouvement ci-dessous. Le bon paramétrage est celui de gauche. Pourquoi ?

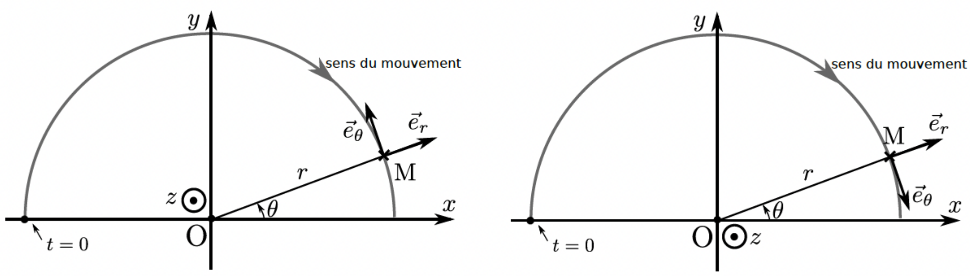


FIGURE 1 – Deux paramétrages d’un même problème

Exercice 2 : Passer d’une base à une autre

M. Melzani et E. Thibierge

Nous considèrons une base cartésienne de centre O et de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{e_x}; \overrightarrow{e_y}; \overrightarrow{e_z})$. Nous lui superposons la base cylindrique de même centre et de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{e_r}; \overrightarrow{e_\theta}; \overrightarrow{e_z})$ et on note θ l’angle orienté de $\overrightarrow{e_x}$ vers $\overrightarrow{e_r}$.

1. Faire un schéma représentant les six vecteurs définis précédemment et l’angle θ.
2. Exprimer les trois vecteurs de la base cylindrique dans la base cartésienne (donc par exemple exprimer $\overrightarrow{e_r}$en fonction de $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$, etc).
3. Exprimer les trois vecteurs de la base cartésienne dans la base cylindrique (donc par exemple exprimer $\overrightarrow{e_x}$en fonction de $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$, $\overrightarrow{e_z}$, etc).

4 (aller plus loin) En dérivant $|\overrightarrow{e_r}|^2$, montrer que le vecteur dérivé $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$.

Exercice 3 : Cinématique 1

Un point M évolue dans le plan (O, x, y). Indiquer les caractéristiques du mouvement (trajectoire et nature du mouvement) si les équations horaires sont (avec a, b, c, d et e des constantes) :
1 $x(t) = at^2 + bt + c$ et $y(t) = 2c$.
2 $r(t) = 2c$ et $\theta(t) = dt + e$
3 $r(t) = bt + c$ et $\theta(t) = 2e$

Exercice 4 : Cinématique 2

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cylindriques sont $r(t) = R$, $\theta(t) = \omega t$ et $z(t) = ht$ avec R, ω et h des constantes.
1 Montrer que le mouvement est uniforme.
2 Déterminer l'accélération du point M.

Exercice 5 : Descente dans un souterrain

d'après M. Melzani et E. Thibierge

L'architecture du parking des Halles de Lyon est telle que lorsqu'une voiture descend elle reste à distance constante de l'axe du parking. Nous supposerons l'inclinaison de la rampe de parking constante, nous ne décrirons la voiture que par un point, et nous supposerons qu'elle se déplace dans le parking à vitesse constante.
1 Justifier que le repérage adapté à décrire le mouvement de la voiture dans le parking est un repérage cylindrique.
2 Donner sans calcul les équations horaires $r(t)$ et $z(t)$.
3 Exprimer le vecteur vitesse de la voiture et son vecteur accélération.
4 En déduire que l'accélération de la voiture est toujours radiale, c'est-à-dire portée par le vecteur $\overrightarrow{e_r}$.

Approfondir son cours

Exercice 6 : Glissage sur un igloo

d'après M. Melzani et E. Thibierge

Cet exercice s'intéresse à la glissade d'un enfant esquimau de masse m sur le toit d'un igloo d'où il s'élance (au sommet) sans vitesse initiale. On adopte le modèle suivant : l'enfant est ramené à un point matériel E, il glisse sans aucun frottement à la surface de l'igloo que l'on suppose sphérique de rayon R.

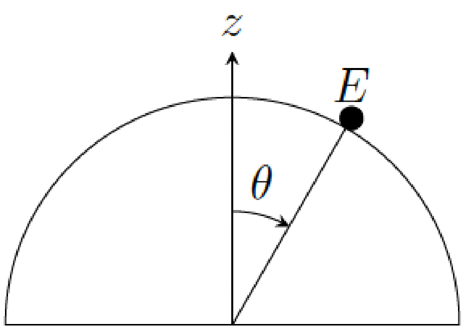


FIGURE 2 – Glissade sur un igloo

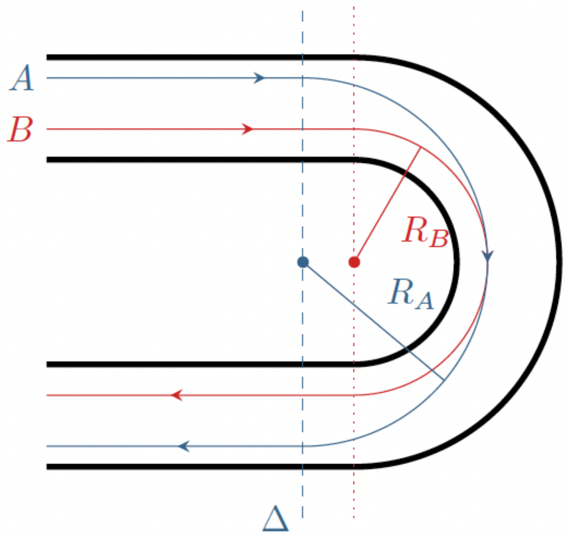
1 Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'enfant pour en déduire deux équations différentielles portant sur l'angle θ. Identifier l'équation du mouvement, qui permet de déterminer $\theta(t)$. Quelle information l'autre équation contient-elle ?
2 En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, montrer que $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - cos\theta)$.
3 En déduire l'expression de la force de réaction de l'igloo en fonction de θ.
4 L'enfant décolle-t-il du toit de l'igloo avant d'atteindre le sol ? Si oui, pour quel angle ?

Exercice 7 : Course de F1

Lors d'une course de F1, Pierre Gasly doit savoir à quelle vitesse il peut prendre un virage pour ne pas finir dans les graviers. En sortie de ligne droite, il atteint une vitesse $V = 320\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Il prend un virage, dont la courbure est assimilable à un demi-cercle de rayon $R = 90\,\mathrm{m}$. Pour ne pas finir dans les graviers, l'accélération dans le virage ne peux pas dépasser $0,8g$.
1 Montrer que P. Galsy ne peut pas prendre le virage à la vitesse V.
2 Déterminer la vitesse maximale à laquelle P. Gasly peut prendre ce virage ?

Pour un même virage, il est possible de prendre la courbure interne avec un plus petit rayon, où la courbure externe avec un plus grand rayon.



(3) Déterminer le temps de trajet pour franchir la droite Δ à la vitesse maximale. Nous prendrons $R_A = 90$ m et $R_B = 75$ m.
(4) Conclure sur la meilleure trajectoire.

Exercice 8 : Toboggan

Henry, assimilable à un point matériel M, est installé, prêt à partir, en haut du grand toboggan du parc aquatique. À partir de l'instant $t = 0$, les équations horaires de la trajectoire de M sont

$$\overrightarrow{OM} = \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right._{(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})} = \left| \begin{array}{l} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ -bt \end{array} \right._{(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})}$$

en coordonnées cartésiennes, avec R, ω et b des constantes positives.
(1) Déterminer les coordonnées cylindriques de Henry.
(2) En déduire la nature et les caractéristiques de la trajectoire.
(3) Déterminer le module de la vitesse de Henry.
(4) Déterminer le module de l'accélération de Henry

Exercice 9 : Face cachée de la Lune

Dans le référentiel géocentrique, la Lune effectue une révolution circulaire centrée sur la Terre en 27,3 jours. La distance du centre de la Terre au centre de la Lune est environ égale à $D = 3{,}8 \times 10^5$ km.
(1) Décrire le référentiel géocentrique.
Depuis la terre, nous observons toujours la même face de la lune.

2 Représenter le mouvement de la lune autour de la Terre. Ajouter deux axes x_l et y_l sur chaque réprésentation.
3 Déterminer la vitesse angulaire ω du centre de la Lune sur sa trajectoire.
4 Déterminer la vitesse et l'accélération du centre de la Lune dans le référentiel géocentrique. Calculer numériquement la norme de sa vitesse.
5 Décrire le mouvement de la Lune dans le référentiel sélénocentrique qui a les mêmes axes de référence que le référentiel géocentrique mais qui suit le centre de la Lune.
6 Déterminer la vitesse angulaire ω_p de rotation propre de la Lune, c'est-à-dire de la rotation de la Lune sur elle-même.

Aller plus loin

Exercice 10 : Satellite SOHO

Le satellite SOHO, d'observation solaire, a été lancé en 1995. Il se trouve situé entre la Terre et le Soleil, constamment à la même distance du Soleil sur la droite joignant le centre de la Terre au centre du soleil.

Nous considérons que la Terre et le Soleil ont une répartition de masse à symétrie sphérique.

1 En ne considérant que l'interaction Terre-Soleil, exprimer la vitesse angulaire de rotation du centre de la Terre autour du Soleil, dans le référentiel héliocentrique, en fonction de G, la masse du Soleil M_S et la distance entre les centres de ces corps notée d. Le mouvement est supposé circulaire et uniforme.

2 Comparer les vitesses angulaires de la Terre et de SOHO autour du Soleil dans le référentiel héliocentrique.

3 Exprimer le vecteur accélération du satellite en fonction de G, M_S, d et de la distance entre le centre de la Terre et le satellite x.

Pour simplifier on posera $M_S = K.m_T$, où m_T est la masse de la Terre.

4 Appliquer la deuxième loi de Newton au satellite pour obtenir une relation entre d, x et K :

$$K = \frac{d^3}{x^2\left(d-x\right)^3}\left(kx^2 - (d-x)^2\right)$$

5 Nous rappelons que K est une constante positive. En déduire une condition sur la distance minimale x_{min} à laquelle nous pouvons placer le satellite.

Nous souhaitons, pour des raisons économiques et énergétiques, placer le satellite en orbite le plus proche possible de la Terre. En supposant que $x \ll d$.

6 En tenant compte de l'approximation $(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon$ si $\varepsilon \ll 1$, établir la relation :

$$x = \frac{d}{\sqrt[3]{3K}}$$

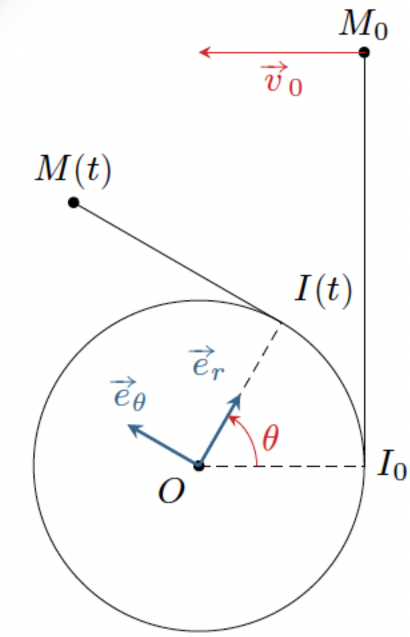
7 Calculer x. Est-ce que la condition de la question 5 est vérifiée ?

Données : $d = 1{,}50 \times 10^9$ m ; $K = 3{,}33 \times 10^5$.

Exercice 11 : Enrouler une bobine de fil

d'après E. Thibierge

Un fil de longueur L, inextensible et de masse négligeable, est accroché tangentiellement à une bobine plate de rayon R. À l'extrémité libre est accroché un point matériel M, de masse m. L'effet de la pensanteur est négligé.



Le fil est tendu et M lancé dans le plan de la bobine depuis la position M_0, perpendiculairement au fil, avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$, afin d'enrouler le fil autour de la bobine. On utilise la base polaire relative au point I, point du fil le plus proche de M à être en contact avec la bobine.

(1) Montrer que $\overrightarrow{OM} = R\vec{e_r} + (L - R\theta)\vec{e_\theta}$. En déduire les composantes de la vitesse et de l'accélération de M dans cette base.

(2) En utilisant le PFD, montrer que la vitesse radiale de M est constante. Que vaut cette constante ?

(3) En déduire, par intégration de la relation précédemment déterminée, une relation entre θ et t, puis déterminer la durée totale τ nécessaire pour enrouler le fil en totalité.

(4) Établir la loi horaire

$$\theta(t) = \frac{L}{R}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}\right)$$

(5) Vérifier que le fil reste tendu tout au long du mouvement.