

Exercice 6. Igloo.

[1]. sys. Enfant assimilé à un pt E de masse m.
réf. terrestre, support galiléen.

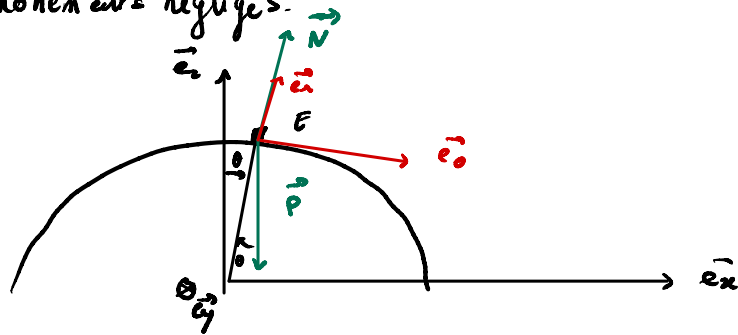
coord. coordonnées polaire : not plan.

DAT • poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

• réaction du support : $\vec{N}$ $\perp$ à la surface
 $\vec{N} = N\vec{e}_n$

• frottements négligés.

sch.



PFD $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{N}$

• Projétons le poids dans la base polaire

$$m\vec{g} = \begin{matrix} -mg \\ \text{pd} \end{matrix} \begin{matrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{matrix}$$

• La vitesse dans la base polaire est :

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} 0 \\ R\dot{\theta} \end{vmatrix} \quad \text{car } r(t) = R = \text{cte.}$$

$$d'où \quad \vec{a} = \frac{d}{dt}(R\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta) = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

• Projétons le PFD dans la base polaire

$$/ \vec{e}_r \quad (1)$$

$$/ \vec{e}_\theta \quad mR\ddot{\theta} = +mg \sin \theta \quad (2)$$

• La seconde équation ⁽²⁾ permet de déterminer θ car c'est la seule inconnue.

• La première équation (1) permet alors d'en déduire la réaction du support N .

$$[2] \quad \ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin(\theta) \quad (*)$$

on reconnaît

$$\frac{d(\dot{\theta})^2}{dt} = 2\ddot{\theta}\dot{\theta} \quad \text{et} \quad \frac{d(\cos(\theta))}{dt} = -\dot{\theta}\sin(\theta)$$

↑
fact° composée

donc on intègre l'équation (*)

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{R} \cos(\theta) + C \quad \text{avec } C \text{ une constante d'intégrat°.}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}(0) = 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases} \quad \text{car à } t=0 \quad \|\vec{v}\| = 0 = R\dot{\theta}(0)$$

d'où $C = \frac{g}{R}$

$$\ddot{\theta} = 2 \frac{g}{R} (1 - \cos(\theta))$$

3 d'après l'équation (2).

$$N = mg \cos(\theta) - m R \ddot{\theta}$$

$$N = m (g \cos(\theta) - 2g (1 - \cos(\theta)))$$

$$N = mg (3 \cos(\theta) - 2)$$

4 L'enfant décolle si la réaction du support devient nulle :

$$N = mg (3 \cos(\theta_d) - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta_d = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{A.N. } \theta_d \simeq 48^\circ$$