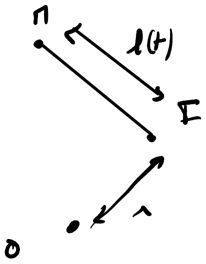
Exercice 11 - Bobine.

1



$$\vec{OM} = \vec{OI} + \vec{IM}$$
$$= R\vec{e_r} + l(t)\,\vec{e_\theta}$$

or $\underset{\text{longueur totale}}{l(t) = L} - \underset{\text{longueur déjà enroulée}}{l'(t)}$

$l'(t) = 2\pi R$ si 1 tour complet

$l'(t) = \theta R$ si θ est l'angle en Radian.

Rq démonstration

$$l'(t) = \int_0^{\theta} \underbrace{R\,d\theta}_{\text{déplacement élémentaire selon } \vec{e_\theta}} = R\,\theta(t) \qquad c^{ste}$$

d'où $$\boxed{\vec{OM}(t) = R\vec{e_r} + (L - R\theta(t))\,\vec{e_\theta}}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \cancel{R\dot\theta}\,\vec{e_\theta} - \cancel{R\dot\theta}\,\vec{e_\theta} - (L - R\theta(t))\,\dot\theta\,\vec{e_r}$$

$$\boxed{\vec{v} = (R\,\theta(t) - L)\,\dot\theta\,\vec{e_r}}$$ (dirigée selon $-\vec{e_r}$, c la CI)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\dot\theta^2\vec{e_r} + (R\theta - L)\ddot\theta\,\vec{e_r} + (R\theta - L)\dot\theta^2\vec{e_\theta}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left|\begin{array}{l} R\dot\theta^2 + (R\theta - L)\ddot\theta \\ (R\theta - L)\,\dot\theta^2 \end{array}\right.}$$
pol

2 <u>Syst</u>. M, ponctuel de masse m

<u>réf</u> : galiléen

<u>coord</u> : polaires $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$

<u>schéma</u> : voir figure.

<u>BAME</u> : $\vec{P} \simeq \vec{0}$, on néglige le poids.

$\vec{T} = -T\vec{e_\theta}$ la tension du fil. (le fil tire la masse M).

PFD

$$m\vec{a} = T\vec{e_\theta}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} /\vec{e_r} \\ /\vec{e_\theta} \end{array} \begin{cases} R\dot\theta^2 + (R\theta - L)\,\ddot\theta = 0 \\ m(R\theta - L)\,\dot\theta^2 = -T \end{cases}$$

$$v_r = (R\theta - L)\,\dot\theta$$

d'où $$\frac{dv_r}{dt} = R\dot\theta^2 + (R\theta - L)\,\ddot\theta = a_r$$

d'où $\frac{dv_r}{dt} = 0 \iff v_r = c^{ste}$

à $t=0$, $\underset{\substack{\uparrow \\ CI}}{\vec{v}} = -v_0 \vec{e_x}$

d'où $\forall t$ $\boxed{(R\theta - L)\,\dot{\theta} = -v_0}$

j'intègre

$\boxed{3}$ $R\theta\dot{\theta} - L\dot{\theta} = -v_0$

$$R\,\theta\frac{d\theta}{dt} - L\frac{d\theta}{dt} = -v_0$$

$$\frac{R}{2}\frac{d\theta^2}{dt} - L\frac{d\theta}{dt} = -v_0$$

$$\int \frac{R}{2}\frac{d\theta^2}{\cancel{dt}}\cancel{dt} - \int L\frac{d\theta}{\cancel{dt}}\cancel{dt} = -v_0\int dt$$

$$\frac{R}{2}\theta^2 - L\theta = -v_0 t + c^{ste}$$

$$\left(\frac{R}{2}\theta - L\right)\theta = -v_0 t + c^{ste}$$

or à $t=0$, $\theta = 0 \iff c^{ste} = 0$

d'où $\boxed{\left(\frac{R}{2}\theta - L\right)\theta + v_0 t = 0}$

□ $t = \tau$ si $\theta = \frac{L}{R}$ (nb de tour / angle qu'il faut pour enrouler toute la corde)

d'où $\left(\frac{RL}{2\cancel{R}} - L\right)\frac{L}{R} + v_0\tau = 0$

$$+\frac{1}{2}\frac{L^2}{R} = v_0\tau$$

$\iff$ $\boxed{\tau = \frac{L^2}{2 v_0 R}}$ (on vérifie que c'est homogène !)

$\boxed{4}$ On cherche à résoudre θ

$$\frac{R}{2}\theta^2 - L\theta + v_0 t = 0$$

polynome d'ordre 2 sur θ

$$\Delta = L^2 - 4\frac{R}{2}v_0 t = L^2 - \frac{\cancel{4}\cancel{R}}{\cancel{2}}\overbrace{\frac{L^2}{\cancel{2}\tau\cancel{R}}}\,t$$

$$= L^2\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

or $t < \tau$ donc $\Delta \geq 0$!

et $\theta(t) = \frac{L \pm L\sqrt{1 - t/\tau}}{R}$

$$= \frac{L}{R}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}\right)$$

On ne garde que la solution positive (la solution $\ominus$ n'a pas de sens physique d'où $\boxed{\theta(t) = \frac{L}{R}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}\right)}$

$\boxed{5}$ Dans le PFD $/\vec{e_\theta}$

$$\underbrace{m}_{>0}(R\theta - L)\underbrace{\dot{\theta}^2}_{\geq 0} = -T$$

vérifions que $R\theta - L < 0$ (forcément car $R\theta < L$, mais suivons le sujet tout de même)

$$\cancel{R}\frac{L}{\cancel{R}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}\right) - L = -\sqrt{1 - \frac{t}{\tau}} \leq 0$$

($= 0$ ssi $t = \tau$, donc que tout est enroulé (CQFD).