



Classes préparatoires aux grandes écoles

Filière scientifique

Voie Technologie et sciences industrielles (TSI)

Annexe 1

Programmes de mathématiques



Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques de la classe TSI 1^{ère} année

Classe préparatoire TSI1

Programme de mathématiques

Table des matières

Préambule	2
Objectifs de formation	2
Description et prise en compte des compétences	2
Unité de la formation scientifique	3
Architecture et contenu du programme	4
Organisation du texte	4
Programme	5
Vocabulaire ensembliste et méthodes de raisonnement	5
Premier semestre	7
Pratique calculatoire	7
Nombres complexes	9
Étude globale d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles	10
Géométrie élémentaire du plan	11
Géométrie élémentaire de l'espace	13
Équations différentielles linéaires à coefficients constants	14
Systèmes linéaires	15
Dénombrement	17
Deuxième semestre	18
Nombres réels et suites numériques	18
Limites, continuité et dérivabilité	19
A - Limites et continuité	19
B - Dérivabilité	20
Intégration sur un segment	22
Développements limités	23
Polynômes	24
Calcul matriciel	25
Espaces vectoriels et applications linéaires	25
A - Espaces vectoriels	26
B - Espaces vectoriels de dimension finie	27
C - Applications linéaires et représentations matricielles	27
Probabilités sur un univers fini	29
Variables aléatoires sur un univers fini	30

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires technologiques TSI et TPC sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.

Objectifs de formation

Les étudiants des classes préparatoires doivent acquérir les compétences nécessaires aux scientifiques et technologues, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs, enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour y faire face, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires technologiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

- **chercher**, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner**, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer**, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher

Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.

Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser

Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques, permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles de l'ingénieur, mathématiques et informatique).

Représenter

Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonnement, argumenter

La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique

Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent. Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral

La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les équations différentielles sont au cœur des activités de modélisation pour les sciences physiques et les sciences industrielles de l'ingénieur ; les probabilités permettent d'illustrer certains résultats d'analyse et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

C'est ainsi que le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques, chimiques ou industriels (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure des grandeurs mécaniques ou physiques...).

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.

Les professeurs de mathématiques doivent régulièrement accéder aux laboratoires afin de favoriser l'établissement de liens forts entre la formation mathématique et les formations dispensées dans les enseignements scientifiques et technologiques. Cet accès permet de :

- prendre appui sur les situations expérimentales rencontrées dans ces enseignements ;
- connaître les logiciels utilisés et l'exploitation qui peut en être faite pour illustrer les concepts mathématiques ;
- prendre en compte les besoins mathématiques des autres disciplines.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un problème spécifique et la construction, pour le résoudre, d'outils conceptuels qui, pris ensuite par les mathématiciens comme objets d'étude, ont pu ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

Architecture et contenu du programme

Le programme s'en tient à un cadre et à un vocabulaire théorique bien délimités, mais suffisamment efficaces pour l'étude de situations usuelles, et assez riches pour servir de support à une formation solide.

Les programmes proposent des contenus équilibrés d'algèbre, d'analyse et de géométrie, auxquels s'ajoute un enseignement de probabilités visant à consolider les notions étudiées au lycée. Les probabilités permettent de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des ponts avec les autres disciplines.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

La géométrie, en tant qu'outil de modélisation et de représentation, est intégrée à l'ensemble du programme, qui préconise le recours à des figures pour aborder l'algèbre linéaire et les fonctions de variable réelle.

Le choix a été fait d'introduire assez tôt dans l'année un module substantiel visant à consolider ou à introduire des pratiques de calcul (limites des fonctions, dérivation, calcul de primitives, résolution de certains types d'équations différentielles) avant d'introduire les théories sous-jacentes, afin d'en faciliter l'assimilation.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants. Cela doit être notamment la règle lors des séances de travaux dirigés et de travaux pratiques d'informatique.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours. À l'intérieur de chaque semestre, le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes. En particulier, la chronologie retenue dans la présentation des différentes sections du programme ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression : afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les disciplines scientifiques et technologiques.

Programme

Vocabulaire ensembliste et méthodes de raisonnement

Cette section regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions sont introduites de manière progressive et trouvent naturellement leur place dans les autres sections, en vue d'être acquises en fin de première année. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme. Plusieurs groupes classiques étant rencontrés dans le cadre du programme, la terminologie associée peut être utilisée mais aucune connaissance théorique n'est exigible.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Quantificateurs.	L'emploi des quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Connecteurs logiques : disjonction (ou), conjonction (et), implication, équivalence.	Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs et les connecteurs logiques pour formuler avec précision certains énoncés et leur négation.
b) Ensembles	
Appartenance, inclusion. Sous-ensemble (ou partie) de E . Ensemble vide. Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, complémentaire.	Démontrer une égalité, une inclusion de deux ensembles. Maîtriser le lien entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes. Notations $E \setminus A$, $\bar{A}$, A^c .
Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles. Ensemble des parties d'un ensemble.	Un élément de E^p est appelé p -liste ou p -uplet d'éléments de E . Notation $\mathcal{P}(E)$.
c) Propriétés de $\mathbb{N}$ et raisonnement par récurrence	
Propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$.	Les propriétés de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre dans $\mathbb{N}$ sont supposées connues. Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément. Toute partie majorée non vide de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément. Raisonnement par récurrence.	Dans la pratique, on se limite aux récurrences simple ou double. Les connaissances du cycle terminal sur les suites arithmétiques ou géométriques ou les calculs de sommes pourront servir de premier support d'étude, la mise en œuvre d'un raisonnement par récurrence trouvant progressivement sa place dans des situations variées du programme.
d) Autres méthodes de raisonnement	
Raisonnement par contraposition. Raisonnement par l'absurde. Principe d'analyse-synthèse.	Les étudiants doivent savoir distinguer condition nécessaire et condition suffisante. L'objectif est de donner une méthode de résolution détaillée pour les exemples du programme nécessitant ce type de raisonnement. On se limite à des exemples simples en évitant tout excès de technicité.

e) Applications

Application (ou fonction) d'un ensemble E dans un ensemble F . Graphe.

Notation $\mathcal{F}(E, F)$.

Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F .

Toute formalisation est hors programme.

Restriction.

Notation $f|_A$.

Image directe, image réciproque.

On évite tout développement technique sur la notion d'image réciproque. Notation $f^{-1}(B)$.

Composition.

Reconnaître une fonction composée.

Injection, surjection, bijection, réciproque d'une bijection.

Interpréter l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité à l'aide du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Application identité.

Premier semestre

Pratique calculatoire

Prenant appui sur les acquis de la classe de terminale, cette section a pour but de mettre en œuvre des techniques de calcul indispensables en mathématiques et dans les autres disciplines scientifiques. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul intégral et différentiel sont étudiées ultérieurement. Le point de vue adopté ici est principalement pratique. Le professeur organise cette section de la façon qui lui semble la plus appropriée, en tenant compte des acquis des étudiants et des besoins des autres disciplines. Il est nécessaire d'insister sur ces notions tôt dans l'année afin de faciliter le reste de l'apprentissage.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Inégalités dans $\mathbb{R}$

Inégalités larges, inégalités strictes, intervalles de $\mathbb{R}$.
Compatibilité avec les opérations.
Résoudre des inéquations. Application à l'étude de la position relative de deux courbes.
Interpréter graphiquement une inéquation du type $f(x) \leq \lambda$.
L'objectif est une maîtrise élémentaire des inégalités.
Valeur absolue, inégalité triangulaire.

Dresser un tableau de signe.

Interpréter sur la droite réelle des inégalités du type $|x - a| \leq b$.

Majoration, minoration et encadrement de sommes, de produits et de quotients.

b) Équations, inéquations polynomiales

Ces notions sont nouvelles pour les étudiants.

Mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré. Discriminant.
Équation du second degré à coefficients réels.
Factorisation d'un polynôme de degré 2.
Relation entre coefficients et racines des polynômes du second degré.

Recherche des racines complexes d'un polynôme à coefficients réels.

Déterminer le signe d'un trinôme.

Connaissant une racine, en déduire rapidement l'autre en utilisant les relations entre coefficients et racines.

Savoir factoriser un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 dont une racine est connue.

Factorisation d'un polynôme dont une racine est connue.

c) Équations, inéquations trigonométriques

Cercle trigonométrique, valeurs usuelles.
Formules exigibles : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.
Formules de factorisation de $\cos(p) \pm \cos(q)$ et de $\sin(p) \pm \sin(q)$.
Lignes trigonométriques associées aux transformations $\frac{\pi}{2} \pm a$ et $\pi \pm a$.
Tangente d'un angle.
Arctangente d'un réel.

Trigonométrie dans un triangle rectangle.

Utiliser le cercle trigonométrique pour résoudre des équations et inéquations trigonométriques.

Linéarisation de $\cos^2(a)$ et $\sin^2(a)$.

Transformation de $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ en $A \cos(\omega t + \varphi)$.

Introduction à la fonction arctan, comme permettant de trouver la solution de $\tan(x) = b$ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Interprétation sur le cercle trigonométrique.

d) Calcul de limites en un point ou à l'infini

Les étudiants ont peu manipulé les limites au lycée et il convient d'avoir une approche progressive.

Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'un inverse.

Exemples de formes indéterminées :

$$\infty - \infty; \quad 0 \times \infty; \quad 1^\infty; \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Limites de référence :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x}.$$

Croissances comparées.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(x) \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Limite d'une fonction composée.

e) Calcul de dérivées, de primitives et d'intégrales

Ce paragraphe donne des résultats de calcul différentiel utiles aux autres disciplines scientifiques dès le premier semestre.

Dérivées des fonctions usuelles : $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $\exp$, $\ln$, $\cos$, $\sin$.

Opérations : somme, produit, quotient, composée.
Dérivation de $t \mapsto \exp(\varphi(t))$ avec φ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Primitive sur un intervalle.

Intégrale d'une fonction sur un segment. Interprétation en terme d'aire sous la courbe. Linéarité de l'intégrale.

Calculer une limite par encadrement ou par comparaison.

Ces limites sont l'occasion de varier les situations lors des recherches de limite. La démonstration n'est pas un attendu du premier trimestre.

Maîtriser le calcul des fonctions dérivées dans des cas simples.

Aucune étude théorique de la dérivation n'est abordée à ce stade.

Reconnaître des expressions du type $\frac{u'}{u}$, $u'u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u'}{u^n}$, $u' \times (v' \circ u)$ où u et v sont des fonctions dérivables afin d'en calculer des primitives.

On s'appuie sur la formule $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

On illustre les exercices avec des situations issues des autres disciplines.

Aucune étude théorique n'est abordée à ce stade.

f) Sommes et produits

Le symbole de sommation a été introduit au lycée.

Notations et règles de calcul.

Factorielle, coefficients binomiaux.
Triangle de Pascal. Formule du binôme de Newton.

Factorisation de $a^n - b^n$.
Exemple de calcul de sommes :

$$\sum_{k=0}^n k, \quad \sum_{k=0}^n q^k.$$

Effectuer un changement d'indice.

Sommes et produits télescopiques.

L'objectif est de faire acquérir aux étudiants une aisance dans la manipulation des symboles $\sum$ et $\prod$ sur des exemples de difficulté raisonnable.

Notations $n!$, $\binom{n}{k}$ lue « k parmi n ».

Les expressions de $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ et $\binom{n}{n}$ sont à connaître.

C'est l'occasion de remobiliser les résultats de la classe de terminale portant sur la somme des premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique.

Nombres complexes

L'objectif est de consolider et d'approfondir les acquis du cycle terminal. Le programme combine plusieurs aspects :

- équations algébriques (équations du second degré, racines n -ièmes d'un nombre complexe);
- interprétation géométrique des nombres complexes;
- exponentielle complexe et applications à la trigonométrie.

Il est recommandé d'illustrer le cours de nombreuses figures et de relier cette section aux besoins des disciplines scientifiques et technologiques. Les étudiants issus des filières STL n'ont pas abordé la notion de nombre complexe. Il convient d'adopter une approche adaptée à l'aide de l'accompagnement personnalisé.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Nombres complexes

Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Parties réelle et imaginaire, forme algébrique.
Opérations sur les nombres complexes.
Conjugaison : définition, compatibilité avec les opérations.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, affixe d'un point, d'un vecteur et image d'un nombre complexe.
Module d'un nombre complexe.
Relation $|z|^2 = z\bar{z}$.
Module d'un produit et d'un quotient. Inégalité triangulaire.

La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Notations $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$.

Interpréter géométriquement le conjugué d'un nombre complexe.
Notation $\bar{z}$.
On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.
Interpréter géométriquement le module d'un nombre complexe.
Interpréter géométriquement $|z - a|$ pour $a, z \in \mathbb{C}$.

b) Nombres complexes de module 1

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Définition de $e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$, formules d'Euler. Description des éléments de $\mathbb{U}$.
Relation $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$.
Formule de Moivre.

Notation $\mathbb{U}$.

Factoriser $e^{ip} \pm e^{iq}$. Lien avec la factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$.
Linéariser et factoriser des expressions trigonométriques.
Retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ pour de petites valeurs de n .
Il s'agit de consolider une pratique du calcul, en évitant tout excès de technicité.

c) Arguments d'un nombre complexe non nul

Arguments d'un nombre complexe non nul.

Arguments d'un produit, d'un quotient.

Écrire un nombre complexe non nul sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (forme exponentielle).
Interpréter géométriquement un argument d'un nombre complexe.
Calcul d'un argument à l'aide de la fonction arctan.
On interprétera géométriquement la multiplication d'un complexe par $e^{i\theta}$.

d) Exponentielle complexe

Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe : $e^z = e^x e^{iy}$ où $z = x + iy$ et $x, y \in \mathbb{R}$.
Relation $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Notations $\exp(z)$, e^z .
Résoudre une équation du type $e^z = e^{z'}$.

e) Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Racines carrées d'un nombre complexe.

Équation du second degré dans $\mathbb{C}$.

Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique ou exponentielle.
Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.

f) Racines n -ièmes

Racines de l'unité : définition, description, propriétés.	Représenter géométriquement les racines de l'unité. Notation $\mathbb{U}_n$.
Description des racines n -ièmes d'un nombre complexe.	Résoudre l'équation $z^n = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

Étude globale d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

Dans le prolongement du cycle terminal du lycée, on consolide dans cette section les méthodes d'étude et de représentation des fonctions réelles d'une variable réelle. Le champ des fonctions mobilisables est étendu : aux fonctions exponentielle et logarithme népérien et aux fonctions trigonométriques, étudiées en classe de terminale, on ajoute les fonctions puissances et les fonctions trigonométriques réciproques. Cette section est naturellement à relier aux disciplines scientifiques et technologiques.

a) Généralités sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$

Ensemble de définition d'une fonction.	C'est l'occasion de faire travailler la notion de composition de fonction et la résolution d'inéquations.
Représentation graphique d'une fonction.	Représenter graphiquement une fonction donnée par son expression. Représenter graphiquement $x \mapsto f(x) + a$, $x \mapsto f(x \pm a)$, $x \mapsto f(ax)$ et $x \mapsto af(x)$ à partir du graphe de f .
Fonctions paires, impaires, périodiques. Somme, produit, quotient, composée. Monotonie.	Interpréter géométriquement ces propriétés.
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Interpréter géométriquement ces propriétés. Une fonction f est bornée si et seulement si $ f $ est majorée.
Extremum global, extremum local.	C'est l'occasion d'établir des encadrements à partir d'études de signe.

b) Comportement asymptotique d'une fonction

Asymptotes horizontales, verticales.	Interprétation graphique.
--------------------------------------	---------------------------

c) Dérivation

Nombre dérivé en un point. Fonction dérivable en un point. Équation de la tangente en un point. Application à l'étude des variations ou du signe d'une fonction.	Interprétation géométrique du nombre dérivé. Dresser le tableau de variation d'une fonction. Faire le lien entre injectivité et stricte monotonie. Un tableau de variation clairement présenté, accompagné de la détermination du signe de la dérivée et des valeurs ou limites aux bornes, vaut justification de bijectivité.
Fonction réciproque.	Tracer le graphe d'une fonction réciproque. Calculer la dérivée d'une fonction réciproque. Les formules sont admises et pourront être démontrées au second semestre. La formule peut être illustrée graphiquement.

d) Étude d'une fonction

Plan d'étude d'une fonction.

Déterminer les symétries et les périodicités afin de réduire l'ensemble d'étude d'une fonction.
 Déterminer les variations et les limites d'une fonction.
 Déterminer les extremums éventuels d'une fonction.
 Tracer le graphe d'une fonction.
 Obtenir des inégalités grâce à une étude de fonction.
 Les asymptotes ainsi que la position des tangentes par rapport à la courbe seront traitées ultérieurement comme des applications des développements limités.

e) Fonctions usuelles

Racine carrée. Dérivée.
 Valeur absolue.
 Partie entière. Notation $[x]$.
 Étude des fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.

Les étudiants doivent savoir représenter graphiquement ces fonctions.

Fonctions circulaires directes et réciproques : rappels sur les fonctions cos et sin, définition et étude des fonctions tan, arcsin, arccos, arctan.

Déterminer la dérivée, les variations et le graphe de ces fonctions.

Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$.

On introduit la notation $\sqrt[n]{x}$ pour $x > 0$, sans développement.

Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Déterminer la dérivée, les variations et le graphe de ces fonctions.

Les formules du type $\sin(\arccos x)$ ne sont pas à connaître.

Croissances comparées des fonctions logarithme népérien, puissances et exponentielle.

Comparer les fonctions au voisinage de l'infini.

Les fonctions hyperboliques sont hors programme.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\exp(\beta x)} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \exp(\beta x) \text{ pour } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x \text{ pour } \alpha > 0.$$

Géométrie élémentaire du plan

À l'issue de la terminale, les étudiants connaissent le plan géométrique euclidien en tant qu'ensemble de points, la façon d'associer à deux points A et B le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ainsi que les propriétés opératoires usuelles. Il convient d'observer que tout vecteur s'exprime comme combinaison linéaire de deux vecteurs indépendants, c'est-à-dire non colinéaires. Dans le plan, les notions suivantes sont supposées connues : calcul vectoriel, distance euclidienne, orthogonalité, repère orthonormé, angles. La donnée d'un repère orthonormé identifie le plan à $\mathbb{R}^2$ ou à $\mathbb{C}$. La géométrie joue un rôle essentiel en mathématiques et dans les disciplines scientifiques et technologiques ; elle est au cœur des compétences de modélisation et de représentation. Cette section doit être traitée en liaison avec les autres disciplines.

a) Repérage dans le plan

Repère orthonormé (ou orthonormal).
 Coordonnées cartésiennes.

On peut introduire à cette occasion le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires.

Changement de repère par translation.

b) Barycentre

La notion de barycentre est introduite en vue des autres disciplines et est l'occasion de manipuler les vecteurs.

Systèmes de points pondérés et barycentre d'un système de points pondérés.

Coordonnées du barycentre dans un repère du plan.

Construire le barycentre d'un système d'au plus 4 points du plan.

L'associativité du barycentre est hors programme.

Illustration pour le cas de l'isobarycentre de deux ou trois points.

c) Produit scalaire

Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ sinon.

Bilinéarité, symétrie.

Interpréter le produit scalaire en termes de projections orthogonales.

Exprimer le produit scalaire dans une base orthonormée.

Caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs.

Déterminer une mesure d'un angle non orienté.

Démonstrations non exigibles.

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, décomposition

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j}) \vec{j}.$$

d) Déterminant dans une base orthonormée directe

Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

et $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ sinon.

Bilinéarité, antisymétrie.

Interpréter la valeur absolue du déterminant en termes d'aire d'un parallélogramme.

Caractériser la colinéarité de deux vecteurs.

La notion d'orientation du plan est admise, ainsi que celle de base orthonormée directe.

Calculer le déterminant dans une base orthonormée directe.

Démonstrations non exigibles.

Notation : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

e) Droites

Définition, vecteur directeur, vecteur normal.

Équation cartésienne et système d'équations paramétriques.

Projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Distance d'un point à une droite.

Passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne et inversement.

Déterminer l'intersection de deux droites.

Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Application au calcul de la distance d'un point à une droite.

Aucune formule de distance d'un point à une droite n'est au programme.

f) Cercles

Définition, équation cartésienne.

Représentation paramétrique

Reconnaître une équation cartésienne de cercle.

Déterminer une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon.

Déterminer le centre et le rayon d'un cercle à partir d'une équation.

Géométrie élémentaire de l'espace

Dans cette section, on adapte à l'espace les notions étudiées dans la section de géométrie plane. L'étude de ce contenu mathématique nouveau s'appuie de façon essentielle sur la section de géométrie plane et sur l'intuition géométrique développée dans les autres disciplines. Des notions telles que le repérage dans l'espace et le produit vectoriel doivent être abordées en concertation avec les professeurs des disciplines scientifiques et technologiques.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Repérage dans l'espace

Repère orthonormé (ou orthonormal) de l'espace; coordonnées cartésiennes.

Maîtriser le lien entre la géométrie pure et la géométrie repérée.

On peut à nouveau utiliser le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires.

b) Produit scalaire

Définition géométrique.
Bilinéarité, symétrie.

Exprimer le produit scalaire dans une base orthonormée directe.

Démonstrations hors programme.

Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de l'espace, pour tout vecteur $\vec{u}$:

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j}) \vec{j} + (\vec{u} \cdot \vec{k}) \vec{k}.$$

c) Produit vectoriel dans l'espace orienté

Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\angle(\vec{u}, \vec{v})) \vec{k}$$

avec $\vec{k}$ unitaire et directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$; si non le produit vectoriel est le vecteur nul.

Bilinéarité, antisymétrie.

La notion d'orientation de l'espace, reposant sur les conventions physiques usuelles, est admise.

Déterminer si deux vecteurs sont colinéaires.

Exprimer les coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormée directe.

Démonstrations hors programme.

d) Déterminant dans l'espace orienté muni d'une base orthonormée directe

Définition du déterminant de trois vecteurs :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Déterminer si trois vecteurs sont coplanaires.

Interpréter $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ comme volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Exprimer le déterminant dans une base orthonormée directe.

Notation :
$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}.$$

Développement du déterminant selon la troisième colonne, en lien avec la définition.

Démonstrations hors programme.

Trilinéarité, antisymétrie.

e) Plans et droites

Différents modes de définition d'un plan : par un point et deux vecteurs non colinéaires, un point et un vecteur normal, trois points non alignés.

Déterminer une équation cartésienne ou un système d'équations paramétriques d'un plan. Passer d'une représentation à l'autre.

Différents modes de définition d'une droite : par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, comme intersection de deux plans.

Projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan.
Distance d'un point à un plan, distance d'un point à une droite.

Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie comme intersection de deux plans.
Déterminer un système d'équations cartésiennes ou un système d'équations paramétriques d'une droite.
Passer d'une représentation à l'autre.
Étudier les intersections.
Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan.
Application au calcul de distances.
Aucune formule de distance d'un point à une droite ou à un plan n'est au programme.

f) Sphères

Définition, équation cartésienne dans un repère ortho-normé.

Reconnaître une équation cartésienne de sphère.
Déterminer une équation d'une sphère à partir de son centre et de son rayon.
Déterminer le centre et le rayon d'une sphère à partir d'une équation.
Déterminer l'intersection d'une sphère et d'un plan.

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

En classe de terminale, les étudiants ont étudié des exemples simples d'équations différentielles linéaires à coefficients constants du premier ordre. Il s'agit dans cette section de consolider et d'étendre cette étude. Les équations différentielles sont un domaine à la fois très riche pour les mathématiques, pour la physique-chimie et les sciences industrielles de l'ingénieur. Cette section doit être traitée en concertation avec les professeurs des autres disciplines afin de l'illustrer par des exemples issus des domaines scientifiques et technologiques.

a) Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant

Équation $y' + ay = b(x)$ où $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et où b est une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Principe de superposition.

Description de la solution générale de l'équation avec second membre comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Équation $y' + ay = b$ où a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}$ et problème de Cauchy associé.

Écrire et résoudre l'équation homogène associée.

Détermination d'une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ ou de la forme $A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ avec $(A, B, \omega) \in \mathbb{R}^3$.
Aucune technique n'est exigible pour toute autre forme de second membre.

Les étudiants doivent savoir étudier des équations dans lesquelles la variable et la fonction inconnue sont représentées par d'autres lettres que x et y .

Démonstration hors programme.

Détermination de la solution vérifiant une condition initiale donnée.

Les solutions relèvent des automatismes de calcul.

b) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $y'' + ay' + by = f(x)$ où a et b sont des nombres réels et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Donner l'équation caractéristique.

Résoudre l'équation homogène.

Principe de superposition. Description de la solution générale de l'équation avec second membre comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Équation $y'' \pm \omega^2 y = 0$ où $\omega \in \mathbb{R}$ et problème de Cauchy associé.

Détermination d'une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ ou de la forme $A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ avec $(A, B, \omega) \in \mathbb{R}^3$. Aucune technique n'est exigible pour toute autre forme de second membre.

Démonstration hors programme.

Détermination de la solution vérifiant une condition initiale donnée.

Les solutions relèvent des automatismes de calcul.

Systèmes linéaires

Il s'agit d'introduire des notions nouvelles pour les étudiants, qui ne les ont pas rencontrées dans le cycle terminal du lycée. L'objectif est double :

- maîtriser la théorie des systèmes linéaires du point de vue de la méthode du pivot, pour son intérêt mathématique et algorithmique, ainsi que pour ses applications aux disciplines scientifiques et technologiques;
- préparer l'introduction de l'algèbre linéaire abstraite, abordée au 2^e semestre.

Les résultats, présentés dans le cadre des systèmes à coefficients réels, sont étendus sans difficulté au cas des systèmes à coefficients complexes.

a) Systèmes linéaires

Définition d'un système linéaire de n équations à p inconnues.

Système homogène.

Matrice A d'un système linéaire; matrice augmentée $(A|B)$ où B est la colonne des seconds membres.

Opérations élémentaires sur les lignes d'un système ou d'une matrice : échange des lignes L_i et L_j , multiplication de L_i par $\lambda \neq 0$, ajout de λL_j à L_i pour $i \neq j$.

Deux systèmes sont dits équivalents si on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Deux matrices sont dites équivalentes en lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Si on passe d'un système $\mathcal{S}$ à un autre système $\mathcal{S}'$ par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de $\mathcal{S}'$ s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de $\mathcal{S}$.

Reconnaître qu'un système donné est un système linéaire.

Les solutions sont définies comme éléments de $\mathbb{R}^p$.

Système homogène associé à un système quelconque.

Calculer le produit d'une matrice par une colonne. Écrire un système sous la forme matricielle $AX = B$.

Interpréter les opérations sur les lignes en termes de système linéaire.

Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Relier cette notion à la théorie des systèmes linéaires.

Notation $A \underset{L}{\sim} A'$.

Cela justifie la présentation matricielle d'un système linéaire.

b) Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Une matrice est dite échelonnée en lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1. si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi;
2. à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non entièrement nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

Une matrice échelonnée en lignes est dite échelonnée réduite en lignes lorsque tous les pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Toute matrice non nulle est équivalente en lignes à une matrice échelonnée réduite en lignes.

Reconnaître et exploiter des matrices échelonnées dans le cadre de l'étude de systèmes linéaires.

Un schéma en « escalier » illustre la notion de matrice échelonnée.

On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non entièrement nulle.

Déterminer la matrice échelonnée réduite en lignes associée à un système donné.

L'unicité est admise.

c) Résolution d'un système linéaire

Inconnues principales et inconnues secondaires (paramètres).

Rang d'un système linéaire.

Rang d'une matrice.

Système incompatible. Système compatible.

Structure de l'ensemble des solutions d'un système compatible.

Caractérisation du nombre de solutions par le rang.

Cas particulier des systèmes carrés.

Faire le lien entre nombre d'équations, nombre d'inconnues et nombre de pivots.

L'invariance du nombre de pivots est admise.

Le rang est ici défini comme égal au nombre de pivots.

Déterminer des conditions de compatibilité pour un système donné.

Résoudre un système compatible.

Il s'agit ici de préparer l'étude et la caractérisation des familles libres et des isomorphismes.

d) Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Combinaison linéaire d'une famille finie $\mathcal{F}$ de vecteurs. Famille libre, famille liée.

Si A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de p vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ de $\mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre;
- le système $AX = 0$ a pour seule solution la solution triviale;
- le rang est à égal à p .

Famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Si A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de p vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ de $\mathbb{R}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$;
- pour toute matrice colonne B à n lignes, le système $AX = B$ est compatible;
- le rang est à égal à n .

Notation $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

Déterminer si une famille de vecteurs est libre ou liée.

L'équivalence de ces trois propriétés dans un cadre général et formel n'est pas un attendu du programme. En revanche, sa mise en œuvre sur des exemples permet d'illustrer le changement entre les registres suivants : familles de vecteurs, matrices, systèmes.

Déterminer un système d'équations linéaires de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Donner une interprétation géométrique dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

L'équivalence de ces trois propriétés dans un cadre général et formel n'est pas un attendu du programme. En revanche, sa mise en œuvre sur des exemples permet d'illustrer le changement entre les registres suivants : familles de vecteurs, matrices, systèmes.

Dénombrement

Cette section a pour but de présenter les bases du dénombrement, notamment en vue de l'étude des probabilités. Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- on adopte un point de vue intuitif pour la définition d'un ensemble fini et la notion de cardinal;
- parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration;
- l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

Cette section est également l'occasion d'aborder les coefficients binomiaux sous un autre angle que celui de la section « Pratique calculatoire ».

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Cardinal d'un ensemble fini

Cardinal d'un ensemble fini non vide. L'ensemble vide est de cardinal nul.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.

Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Cardinal d'une union disjointe, de l'union de deux ensembles, d'un complémentaire, d'un produit cartésien.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Notations $|A|$, $\text{Card}(A)$.

Maîtriser le langage des applications et des bijections dans le cadre des ensembles finis, et le relier aux notions élémentaires sur le dénombrement.

La formule du crible est hors programme.

b) Dénombrement

Nombre de p -uplets (ou p -listes) d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments.

Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.

Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Reconnaître des situations relevant de ce cadre.

La notation A_n^p est hors programme.

Reconnaître des situations de dénombrement relevant de ce cadre.

Donner une interprétation combinatoire des propriétés suivantes :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}; \quad \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n; \quad \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

Deuxième semestre

Nombres réels et suites numériques

L'objectif est d'énoncer les propriétés fondamentales de la droite réelle, et de les appliquer à l'étude des suites, qui interviennent en mathématiques tant pour leur intérêt pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximations de nombres réels). Les notions de borne supérieure et inférieure sont introduites uniquement pour aboutir au théorème de la limite monotone.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Nombres réels

Ensembles usuels de nombres : entiers relatifs, nombres décimaux, nombres rationnels.
Droite réelle.

La construction de ces ensembles de nombres est hors programme.
Faire le lien avec la géométrie.
La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme.

Distance entre deux réels.
La relation d'ordre $\leq$ dans $\mathbb{R}$. Majorant, maximum, minorant, minimum. Borne supérieure, borne inférieure.
Toute partie majorée (resp. minorée) non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).
Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$; une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, $[a, b] \subset I$.

Cas d'une partie de $\mathbb{R}$, puis d'une fonction réelle.
Résultat admis.
Aucun développement n'est attendu.

b) Généralités sur les suites réelles

Modes de définition d'une suite.

Reconnaître une suite définie de façon explicite, implicite ou par récurrence. Reconnaître une suite extraite.
Représenter les termes d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
Toute étude d'une telle suite doit être guidée.

Opérations.
Monotonie, stricte monotonie.
Suite minorée, majorée, bornée.

Manipuler sur des exemples des majorations et minoration.
Une suite (u_n) est bornée si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée.
En terminale technologique, les suites géométriques n'ont été vues qu'avec des raisons positives.

Suite arithmétique, suite géométrique.

c) Limite d'une suite réelle

Limite finie ou infinie d'une suite.
Unicité de la limite.

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Notations $u_n \rightarrow \ell$, $\lim u_n$.

Suite convergente, divergente.
Toute suite réelle convergente est bornée.
Si une suite possède une limite (finie ou infinie) alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.
Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite alors la suite (u_n) converge vers cette limite commune.
Opérations sur les limites de suites : somme, multiplication par un scalaire, produit, inverse.
Cas des suites géométriques, arithmétiques.
Passage à la limite dans une inégalité.

Montrer la divergence d'une suite à l'aide de suites extraites.

Lever une indétermination.

d) Théorèmes d'existence d'une limite

Théorèmes de convergence par encadrement.

On pourra montrer l'existence d'une limite ℓ en majorant $|u_n - \ell|$, notamment lorsque la suite vérifie une inégalité du type : $|u_{n+1} - \ell| \leq M|u_n - \ell|$.

Divergence par comparaison : si (u_n) tend vers $+\infty$ et si, pour tout n , on a $u_n \leq v_n$, alors (v_n) vers $+\infty$.
Théorème de la limite monotone.
Théorème des suites adjacentes.

Adapter cet énoncé aux suites tendant vers $-\infty$.

Exploiter ce théorème sur des exemples.
Il convient d'insister sur l'intérêt algorithmique de cette notion : résolution approchée par dichotomie d'une équation du type $f(x) = 0$.

e) Comparaisons de suites

Relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.

Notation $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.
On définit ces relations à partir du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ en supposant que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Croissances comparées des suites usuelles : $\ln^\beta(n)$, n^α et $e^{\gamma n}$.

Traduire les croissances comparées à l'aide de o .

Lien entre les différentes relations de comparaison.

Équivalence entre les relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.

Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient, les puissances.

Exploiter ces résultats pour déterminer le comportement asymptotique de suites.

Toute autre opération sur les équivalents est hors programme.

Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Limites, continuité et dérivabilité

Cette section est divisée en deux parties, consacrées aux limites et à la continuité pour la première, au calcul différentiel pour la seconde. On y formalise les résultats qui ont été utilisés d'un point de vue calculatoire au premier semestre. Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et sont à valeurs réelles.

Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré sur a si a est réel, avec un intervalle $[A, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, A]$ si $a = -\infty$.

A - Limites et continuité

L'essentiel du paragraphe qui suit consiste à adapter au cadre continu les notions déjà abordées pour les suites. Le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

a) Limite finie ou infinie en un point ou en $\pm\infty$

Étant donné un point a appartenant à I ou extrémité de I , limite finie ou infinie d'une fonction en a .

Maîtriser le formalisme mathématique de la définition de la limite et le mettre en relation avec l'intuition géométrique.

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.

Notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \ell$.

Notation $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Unicité de la limite.

Si f admet une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a .

Aucun formalisme n'est attendu sur la notion de voisinage.

Limite à droite, limite à gauche.

Notations $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I \setminus \{a\}$.

Image d'une suite de limite ℓ par une fonction admettant une limite en ℓ .

Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite à l'aide de deux suites.

b) Comparaison de fonctions

Passage à la limite dans une inégalité. Théorème d'encadrement pour les fonctions.

Théorème de la limite monotone.

Relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence.

Démonstration non exigible.

Adapter au cas des fonctions les définitions et les résultats étudiés sur les suites.

c) Continuité en un point

Continuité de f en un point a de I .

Maîtriser le formalisme mathématique de la définition de la continuité.

La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

Continuité à droite et à gauche.

Prolongement par continuité en un point.

Pour a n'appartenant pas à I , la fonction f se prolonge par continuité en a si et seulement si elle admet une limite finie en a .

Opérations sur les fonctions continues : somme, produit, quotient, composition.

Exploiter ces résultats sur des exemples.

On pourra en profiter pour introduire la notion de stabilité d'un ensemble par combinaison linéaire sans évocation particulière de structure vectorielle.

d) Continuité sur un intervalle

Définition. Opérations. Ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue.

Appliquer le procédé de dichotomie à l'approximation d'un zéro d'une fonction continue.

Démonstration hors programme.

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration hors programme.

e) Continuité et bijectivité

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$; sa réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$ (de même monotonie que la fonction f).

Appliquer ce résultat sur des exemples.

Comparer la représentation graphique d'une fonction continue strictement monotone et celle de sa réciproque. Démonstration hors programme.

B - Dérivabilité**a) Nombre dérivé, fonction dérivée**

Dérivabilité de f en a , nombre dérivé.

Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point particulier, à partir de la définition.

Notation $f'(a)$.

Équivalence avec l'existence d'un développement limité en a à l'ordre 1.

La droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

est appelée tangente au graphe de f au point d'abscisse a . Cette définition peut être justifiée (limite de sécantes). Interprétation cinématique.

Dérivabilité à droite et à gauche en a .

Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.

b) Opérations sur les fonctions dérivables

Si f et g sont dérivables en a , dérivabilité et dérivée en a de $f + g$, fg et, si $g(a) \neq 0$, de $\frac{f}{g}$.

Dérivabilité et dérivée en a de $g \circ f$ lorsque f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$.

Si f est une fonction continue et strictement monotone (donc bijective) de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$ et si f est dérivable en a , condition nécessaire et suffisante de dérivabilité de f^{-1} en $f(a)$ et calcul de la dérivée en ce point.

Extension des résultats précédents aux fonctions dérivables sur un intervalle. En particulier, propriétés de la réciproque d'une bijection de classe $\mathcal{C}^1$.

Interprétation géométrique de la formule de la dérivée de la fonction réciproque.

c) Propriétés des fonctions dérivables

Notion d'extremum local. Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.

Théorème de Rolle.

Égalité des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable sur un intervalle I et si, pour tout $t \in I$, $|f'(t)| \leq M$, alors

$$\text{pour tous } x, y \text{ de } I, |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|.$$

Caractérisation des fonctions constantes, croissantes, strictement croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.

Utiliser le théorème de Rolle pour établir l'existence de zéros d'une fonction. Démonstration non exigible. Interpréter ce résultat de manière géométrique et cinématique. Le théorème de la limite de la dérivée est hors programme.

Appliquer ces résultats sur des exemples.

d) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I , où k appartient à $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Opérations : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composée, réciproque.

Ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

Maîtriser le calcul des fonctions dérivées. Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

Intégration sur un segment

L'objectif de cette section est de consolider, d'approfondir et d'étendre la notion d'intégrale étudiée au lycée. La présentation de l'intégrale d'une fonction positive sur un segment s'appuie sur la notion d'aire, mais tout développement théorique sur ce sujet est hors programme.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Intégrale $\int_a^b f$ d'une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.

Valeur moyenne.

Inégalité $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

Relation de Chasles.

Une fonction continue et positive sur $[a, b]$ (où $a < b$) est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

Interpréter géométriquement l'intégrale d'une fonction positive (aire sous la courbe).

Modéliser une situation physique par une intégration.

La construction est hors programme.

Notations $\int_a^b f(t) dt$ ou $\int_a^b f$.

Interprétation graphique.

Majorer et minorer une intégrale.

Extension de la notation $\int_a^b f(t) dt$ au cas où $b \leq a$.

b) Sommes de Riemann et méthode des rectangles

Si f est une fonction continue de $[a, b]$ (où $a < b$) dans $\mathbb{C}$, alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Interpréter géométriquement cette propriété.

Démonstration dans le cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Approximer une intégrale par la méthode des rectangles ou la méthode des trapèzes.

On pourra à cette occasion donner une justification numérique de la valeur moyenne.

c) Calcul intégral

Si f est une fonction continue sur I et si x_0 est un point de cet intervalle, alors

$$x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0 .

En particulier, toute fonction continue sur I admet des primitives sur I .

Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Pour f de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

Intégration par parties.

Changement de variable : si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors, pour tous a et b dans I ,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Primitives des fonctions usuelles.

Appliquer ce théorème sur des exemples.

Deux primitives d'une fonction continue sur l'intervalle I diffèrent d'une constante.

Appliquer ces techniques au calcul de primitives.

Tout excès de technicité est exclu.

Savoir reconnaître des primitives usuelles.

Pour les fonctions rationnelles, on se limite à des cas simples : aucune théorie de la décomposition en éléments simples n'est au programme.

d) Formule de Taylor avec reste intégral

Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n .

Exploiter la formule de Taylor avec reste intégral pour établir des égalités, des inégalités.

Développements limités

L'objectif est la maîtrise du calcul de développements limités simples. Le calcul de développements limités à un ordre élevé n'est pas un objectif du programme; il relève des outils logiciels.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

Si f est définie sur l'intervalle I et si a est un point de I ou une extrémité de I , développement limité d'ordre n de f au voisinage de a .

Unicité, troncature.

Forme normalisée d'un développement limité :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n))$$

avec $a_0 \neq 0$.

Équivalence $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_0 h^p$.

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit.

Composition, application au quotient.

Intégration terme à terme d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n en un point a de I d'une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .

Développements limités usuels.

Interpréter un développement limité comme approximation d'une fonction.

Ramener un développement limité en 0 par translation.

Adaptation au cas où f est définie sur $I \setminus \{a\}$.

Développement limité en 0 d'une fonction paire ou impaire.

Étudier le signe d'une fonction au voisinage d'un point à l'aide d'un développement limité.

Exploiter la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement limité.

Déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée.

Aucun résultat général sur ce point n'est exigible.

La division suivant les puissances croissantes est hors programme.

Calculer le développement limité d'une application de classe $\mathcal{C}^n$ à partir de ses dérivées successives.

Exploiter les développements limités usuels dans le cadre de développements limités simples.

Exploiter les outils logiciels pour des développements limités plus complexes.

Les étudiants doivent connaître les développements limités à tout ordre en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $\exp$, $\sin$, $\cos$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $\arctan$ ainsi que celui de $\tan$ à l'ordre 3.

b) Applications des développements limités

Aucune théorie n'est attendue dans ce paragraphe. On illustrera seulement les différents cas de figure.

Calcul de limites.

Étude locale d'une fonction.

Utiliser les développements limités pour lever une forme indéterminée.

Déterminer un prolongement par continuité, la dérivabilité en un point, la nature d'un extremum, une tangente et sa position relative locale par rapport à la courbe, grâce à un développement limité.

Déterminer les éventuelles asymptotes et leurs positions relatives locales.

Aucun résultat général n'est exigible.

Polynômes

L'objectif est d'étudier par des méthodes élémentaires les propriétés de base des polynômes, et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques. Le programme se limite au cas où les coefficients sont réels ou complexes ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On pourra confondre polynômes et fonctions polynomiales.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Polynômes à une indéterminée

Ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.

Notation $a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ ou $\sum_{p=0}^n a_pX^p$.

Opérations : somme, produit et composée.

Degré d'un polynôme. Coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé). Degré d'une somme et d'un produit.

Le degré du polynôme nul vaut par convention $-\infty$.

Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .

La notion de valuation d'un polynôme est hors programme.

Fonction polynomiale associée à un polynôme.

b) Bases de l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Diviseurs et multiples.

Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

Effectuer une division euclidienne de polynômes.

c) Dérivation

Polynôme dérivé.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynôme associée.

Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit.

Dérivées d'ordre supérieur. Formule de Leibniz. Formule de Taylor.

d) Racines

Racine (ou zéro) d'un polynôme.

Déterminer les racines d'un polynôme.

Caractériser les racines par la divisibilité.

Multiplicité d'une racine.

Caractérisation par les valeurs des dérivées successives en a de l'ordre de multiplicité de la racine a .

Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.

e) Décomposition en facteurs de degré 1

Théorème de d'Alembert-Gauss.

Décomposition d'un polynôme en facteurs de degré 1 sur $\mathbb{C}$.

Démonstration hors programme.

On illustre l'idée de la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ à partir de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, mais l'étude générale des polynômes irréductibles est hors programme.

f) Somme et produit des racines d'un polynôme

Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

Recherche de deux nombres complexes connaissant leur somme et leur produit.

Les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.

Calcul matriciel

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Matrices : opérations et propriétés

Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Matrices carrées, matrices triangulaires, matrices diagonales.

Somme de deux matrices. Multiplication par un scalaire.

Produit de deux matrices.

Notation $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Interpréter le produit AX d'une matrice par une colonne comme une combinaison linéaire des colonnes de A .

Interpréter la j -ème colonne du produit AB comme le produit de A par la j -ème colonne de B .

Interpréter la i -ème ligne du produit AB comme le produit de la i -ème ligne de A par B .

Cas particulier de la multiplication à droite par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ou la multiplication à gauche par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ pour en extraire une ligne ou une colonne.

Puissance et inverse d'une matrice diagonale.

Formule du binôme pour deux matrices qui commutent.

Calculer les puissances de certaines matrices carrées.

b) Matrice inversible

Matrice carrée inversible.

On appelle groupe linéaire, noté $GL_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices inversibles de taille n .

Caractériser l'inversibilité d'une matrice carrée A par l'existence et l'unicité de la solution de tout système de la forme $AX = B$ où X et B sont deux matrices colonnes.

Caractériser l'inversibilité par le rang.

Reconnaître une matrice inversible et calculer son inverse.

Calcul de l'inverse d'une matrice A carrée de taille n par différents moyens (par inversion d'un système, à l'aide de la matrice augmentée $(A|I_n)$, à l'aide d'un polynôme annulateur...).

On admet que l'inversibilité à droite implique l'inversibilité à gauche et réciproquement.

Toute théorie générale des groupes est exclue.

La notion de comatrice est hors programme.

Inverse du produit de matrices inversibles.

Espaces vectoriels et applications linéaires

Le programme se limite à l'algèbre linéaire sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. Après l'approche numérique des sections « Systèmes linéaires » et « Calcul matriciel », on passe à une vision plus géométrique. Les trois grands thèmes traités sont les espaces vectoriels, la théorie de la dimension finie et les applications linéaires.

Dans la sous-section « A - Espaces vectoriels » on généralise les objets de la géométrie du plan et de l'espace : vecteurs, bases, droites, plans...

La deuxième sous-section « B - Espaces vectoriels de dimension finie » vise à définir la dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie et en présente plusieurs méthodes de calcul. La notion de dimension interprète le nombre de degrés de liberté pour un problème linéaire.

L'étude des applications linéaires suit naturellement celle des espaces vectoriels à la sous-section « C - Applications linéaires et représentations matricielles ». Son objectif est de fournir un cadre aux problèmes linéaires. Il convient de souligner, à l'aide de nombreuses figures, comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à une dimension supérieure.

Au moins deux approches pédagogiques sont possibles :

- traiter cette section selon l'ordre présenté ci-dessous, en l'illustrant notamment sur les espaces $\mathbb{K}^n$ à l'aide des techniques développées dans les sections « Systèmes linéaires » et « Calcul matriciel » ;
- mettre en place les différentes notions (sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension, applications linéaires) dans le cas particulier des espaces $\mathbb{K}^n$ avant de les étendre aux espaces vectoriels généraux.

Il est attendu des étudiants qu'ils sachent reconnaître une situation se prêtant à une modélisation linéaire conduisant à une représentation adaptée dans un espace bien choisi.

A - Espaces vectoriels

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Définition d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Espaces vectoriels de référence : $\mathbb{K}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}[X]$,

$\mathbb{K}^\Omega$ pour Ω non vide (cas particulier des suites) et

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Produit d'une famille finie de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs.

Passer du registre géométrique au registre algébrique et inversement.

Sous-espaces d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel : définition et caractérisation. Droites et plans vectoriels.

Identifier un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I = \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Appréhender le concept d'espace vectoriel de fonctions.

Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.

Notation $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Intersection de sous-espaces vectoriels.

Passer du registre géométrique au registre algébrique et inversement.

Somme de deux sous-espaces F et G d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

La somme $F + G$ est directe si l'écriture de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.

Exploiter une relation $F \cap G = \{0\}$ pour démontrer que F et G sont en somme directe.

Sous-espaces supplémentaires.

Déterminer l'unique décomposition d'un vecteur donné sur deux sous-espaces supplémentaires.

b) Familles finies de vecteurs

Vecteurs colinéaires.

Famille libre, famille liée.

Déterminer si une famille donnée est libre ou liée.

Obtenir une relation de dépendance dans une famille liée.

Toute famille de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés échelonnés est libre.

Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.

Déterminer si une famille est génératrice.

Bases.

Exemples usuels : bases canoniques des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Coordonnées dans une base. Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x dans une base $\mathcal{B}$.

Déterminer les coordonnées d'un vecteur donné dans une base donnée.

Notation $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

Base adaptée à une somme directe.

Si $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe.

B - Espaces vectoriels de dimension finie

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Dimension finie

Un espace est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul E , on peut extraire une base de E .

Théorème de la base incomplète : toute famille libre de E peut être complétée en une base.

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Dimension.

Dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si E est de dimension n et $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E , alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre, si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice.

Exhiber une base d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E non nul de dimension finie.

Application à l'existence d'une base pour tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie.

On convient que l'espace $\{0_E\}$ est de dimension nulle.

b) Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

Si F est un sous-espace d'un espace vectoriel E de dimension finie alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$. De plus, $F = E$ si et seulement si les deux dimensions sont égales.

Supplémentaires d'un sous-espace. Existence, dimension commune.

Dimension de la somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.

Démontrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels à l'aide d'une inclusion et de l'égalité de leurs dimensions.

Démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires à l'aide de la caractérisation par leur intersection réduite au vecteur nul et la somme de leurs dimensions.

Base obtenue par concaténation de bases de sous-espaces supplémentaires.

Cas d'une somme directe.

c) Famille finie d'une famille de vecteurs

Rang d'une famille finie $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Majorer le rang d'une famille de vecteurs en exhibant une relation linéaire. Le minorer en exhibant une sous-famille libre.

Utiliser le rang d'une famille de vecteurs pour démontrer qu'elle est libre ou génératrice.

Notation $\text{rg}(u_1, \dots, u_p)$.

C- Applications linéaires et représentations matricielles

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

Applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes et automorphismes.

Identité, application $X \mapsto AX$.

Opérations sur les applications linéaires : combinaisons linéaires et composées.

Règles de calcul.

Notations $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$.

Savoir utiliser l'image par une application linéaire de quelques vecteurs pour en déduire l'image d'une combinaison linéaire de ces derniers.

Notation Id_E .

On peut identifier $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes.
 Image directe, image réciproque d'un sous-espace vectoriel.
 Image et noyau.
 L'image par une application linéaire u d'une famille génératrice de E est génératrice de $\text{Im}(u)$.

Notation $\text{GL}(E)$ pour le groupe linéaire.

Notations $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.
 Déterminer une base de l'image, du noyau d'une application linéaire.
 Caractériser l'injectivité d'une application linéaire à l'aide du noyau, la surjectivité à l'aide de l'image.

b) Isomorphismes

Une application linéaire de E dans F est un isomorphisme si et seulement si elle transforme une (toute) base de E en une base de F .
 Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.
 Si E et F ont même dimension finie, alors une application linéaire de E dans F est bijective si elle est injective ou surjective.

Cas particulier des endomorphismes.
 Contre-exemples en dimension infinie.

c) Modes de définition d'une application linéaire

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.
 Une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2 .

d) Rang d'une application linéaire

Rang d'une application linéaire.
 Rang d'une composée :

Notation $\text{rg}(u)$.

$$\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v)).$$

Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.
 Théorème du rang : si E est de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors u est de rang fini et $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u)$.

Démonstration hors programme.
 Utilisation pour la recherche d'une base de l'image et du noyau d'un endomorphisme.

e) Équations linéaires

Une équation, d'inconnue $x \in E$, est dite linéaire si elle est de la forme $u(x) = b$ où $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.
 Structure des solutions, condition de compatibilité, lien avec $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.

Exemples des systèmes linéaires et des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et d'ordre 2.
 La notion de sous-espace affine est hors programme.

f) Représentation matricielle en dimension finie

Matrice d'une application linéaire u dans un couple de bases.

Expression des coordonnées de $u(x)$ en fonction de celles de x .
 Notation $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ où $\mathcal{B}$ est une base de l'espace de départ et $\mathcal{C}$ une base de l'espace d'arrivée.
 Notation $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ dans le cas où $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

Un couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ étant fixé, isomorphisme $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$. Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.

Matrice d'une composée.

Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

Matrice de passage d'une base à une autre.

Effet d'un changement de bases sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.

Matrices semblables.

Déterminer la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire après un changement de base(s).

Choisir une base adaptée à un problème donné.

L'objectif est de donner une première approche de notions qui seront approfondies en seconde année.

La diagonalisation est hors programme.

g) Différentes notions de rang

Image et noyau d'une matrice.

Notations $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$.

Déterminer des équations de l'image et du noyau de A .

On utilise l'échelonnement d'un système pour déterminer des équations de l'image.

Théorème du rang appliqué aux matrices.

Lien entre les divers aspects de la notion de rang.

Le rang de A , défini comme le nombre de pivots d'une matrice échelonnée équivalente, est également le rang de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^n$ ou, de manière équivalente, le rang de l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associée.

On admet que le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs lignes.

Le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de sa matrice dans une base.

Calculer le rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire par la méthode du pivot.

Le rang d'une application linéaire est égal au rang de sa matrice dans un couple de bases.

Pour le calcul à la main, on se limite à des cas simples.

Caractérisation des matrices inversibles à l'aide du rang.

Conservation du rang par multiplication à droite ou à gauche par une matrice inversible.

Probabilités sur un univers fini

Cette section a pour objectifs de mettre en place un cadre théorique permettant de fonder l'étude des probabilités dans le cas d'un univers fini et de développer la formation des étudiants au raisonnement probabiliste. On enrichit le point de vue fréquentiste étudié au lycée par une formalisation ensembliste. On mettra l'accent sur des exemples issus de la vie courante ou provenant des autres disciplines.

a) Espaces probabilisés finis

Expérience aléatoire. L'ensemble des issues (ou des résultats possibles, ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers.

Événement, événement élémentaire (singleton). Événement certain, événement impossible, événement contraire, événements incompatibles. Opérations sur les événements. Système complet d'événements.

On appelle probabilité sur un univers fini Ω toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et, pour tout couple (A, B) de parties disjointes de Ω , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω .

Probabilité de l'union de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance d'une probabilité.

Modéliser des situations aléatoires.

On se limite au cas où l'univers Ω est fini.

Maîtriser le lien entre point de vue ensembliste et point de vue probabiliste.

On se limite au cas où l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de Ω .

Notation $\bar{A}$ pour l'événement contraire.

Expliciter l'espace probabilisé modélisant une situation aléatoire décrite en langage naturel.

Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et $p_1, \dots, p_n$ sont des réels positifs de somme 1, il existe une et une seule probabilité P sur Ω telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, P(\{\omega_i\}) = p_i.$$

Calculer la probabilité d'un événement à partir d'un tableau de probabilités.

Choisir les valeurs des p_i revient à choisir un modèle probabiliste.

Équiprobabilité (ou probabilité uniforme).

b) Indépendance et conditionnement

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Illustrer une expérience aléatoire à l'aide d'arbres de probabilités.

La définition de $P_B(A)$ est justifiée par une approche heuristique fréquentiste.

L'application P_B est une probabilité.

Formules des probabilités composées, des probabilités totales.

Formules de Bayes : si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors

On donnera plusieurs applications de la vie courante.

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$$

Indépendance de deux événements.

Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P_B(A) = P(A)$.

Indépendance d'une famille finie d'événements.

L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance si $n \geq 3$.

Variables aléatoires sur un univers fini

La notion de variable aléatoire modélise le résultat d'une expérience aléatoire. L'utilisation des variables aléatoires pour modéliser des situations simples dépendant du hasard fait partie des capacités attendues des étudiants. On se limite aux variables aléatoires réelles définies sur un univers fini.

a) Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E . Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.

Modéliser des situations données en langage naturel à l'aide de variables aléatoires.

Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E , notation $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ pour l'événement $X^{-1}(A)$.

Notation $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leq x)$.

Lien entre les événements $(X = k)$, $(X \leq k - 1)$ et $(X \leq k)$.

Loi de probabilité P_X d'une variable aléatoire X .

L'application P_X est définie par la donnée des $P(X = x)$ pour x dans $X(\Omega)$.

Image d'une variable aléatoire par une application.

b) Espérance

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire. Variable centrée.

Interpréter l'espérance en terme de moyenne pondérée.

$$\text{Relation : } E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega).$$

Théorème de transfert : si X est une variable aléatoire réelle à valeurs finies et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors l'espérance de la variable aléatoire $\varphi(X)$ est donnée par la formule

Calculer une espérance à l'aide de la formule du transfert.

$$E(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) P(X = x).$$

$E(aX + b) = aE(X) + b$ pour a et b réels.

On admet de manière plus générale la linéarité de l'espérance.

c) Variance et écart type d'une variable aléatoire

Variance et écart type d'une variable aléatoire. Variable réduite.

Interpréter la variance comme indicateur de dispersion.

Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (Koenig-Huygens).

$V(aX + b) = a^2 V(X)$ pour a et b réels.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

L'inégalité de Markov n'est pas au programme.

d) Lois usuelles

Loi certaine.

Loi uniforme.

Reconnaître des situations modélisables par une loi uniforme.

Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

Reconnaître des situations modélisables par une loi de Bernoulli.

Notation $\mathcal{B}(p)$.

Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

Reconnaître des situations modélisables par une loi binomiale.

Notation $\mathcal{B}(n, p)$.

Espérance et variance associées à ces différentes lois.

Pour la loi uniforme, on limitera les résultats à la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.



Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques de la classe TSI 2nde année

Classe préparatoire TSI2

Programme de mathématiques

Table des matières

Préambule	2
Objectifs de formation	2
Description et prise en compte des compétences	2
Unité de la formation scientifique	3
Architecture et contenu du programme	4
Organisation du texte	4
Programme	5
Compléments d'algèbre linéaire	5
Déterminants	6
Réduction des endomorphismes	7
Fonctions vectorielles et courbes paramétrées	8
Intégration sur un intervalle quelconque	9
Séries numériques	10
Séries entières	11
Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens	12
A - Structure préhilbertienne	12
B - Isométries d'un espace euclidien	13
Séries de Fourier	14
Probabilités	15
A - Compléments sur les variables aléatoires réelles finies	15
B - Probabilités sur un univers dénombrable	16
C - Variables aléatoires discrètes	17
Équations différentielles linéaires	19
Fonctions de plusieurs variables	20

Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires technologiques TSI et TPC sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les étudiantes et étudiants à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers de l'ingénierie, de l'enseignement, de la recherche.

Objectifs de formation

Les étudiants des classes préparatoires doivent acquérir les compétences nécessaires aux scientifiques et technologues, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs, enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour y faire face, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.

En continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires technologiques définissent un corpus de connaissances et de capacités et explicitent six grandes compétences mathématiques :

- **chercher**, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner**, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer**, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Description et prise en compte des compétences

Chercher

Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.

Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser

Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques, permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles de l'ingénieur, mathématiques et informatique).

Représenter

Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonnement, argumenter

La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique

Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent. Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral

La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les équations différentielles sont au cœur des activités de modélisation pour les sciences physiques et les sciences industrielles de l'ingénieur ; les probabilités permettent d'illustrer certains résultats d'analyse et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

C'est ainsi que le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques, chimiques ou industriels (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure des grandeurs mécaniques ou physiques...).

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.

Les professeurs de mathématiques doivent régulièrement accéder aux laboratoires afin de favoriser l'établissement de liens forts entre la formation mathématique et les formations dispensées dans les enseignements scientifiques et technologiques. Cet accès permet de :

- prendre appui sur les situations expérimentales rencontrées dans ces enseignements ;
- connaître les logiciels utilisés et l'exploitation qui peut en être faite pour illustrer les concepts mathématiques ;
- prendre en compte les besoins mathématiques des autres disciplines.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un problème spécifique et la construction, pour le résoudre, d'outils conceptuels qui, pris ensuite par les mathématiciens comme objets d'étude, ont pu ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

Architecture et contenu du programme

Le programme s'en tient à un cadre et à un vocabulaire théorique bien délimités, mais suffisamment efficaces pour l'étude de situations usuelles, et assez riches pour servir de support à une formation solide.

Les programmes proposent des contenus équilibrés d'algèbre, d'analyse et de géométrie, auxquels s'ajoute un enseignement de probabilités visant à consolider les notions étudiées au lycée. Les probabilités permettent de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des ponts avec les autres disciplines.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants. Cela doit être notamment la règle lors des séances de travaux dirigés et de travaux pratiques d'informatique.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours. Le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes. En particulier, la chronologie retenue dans la présentation des différentes sections du programme ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression : afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les disciplines scientifiques et technologiques.

Programme

Compléments d'algèbre linéaire

Cette section est organisée autour de trois objectifs :

- consolider les acquis de la classe de première année;
- étudier de nouveaux concepts : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, projecteurs et symétries, sous-espaces stables, trace, transposée, polynômes de matrice;
- passer du point de vue géométrique au point de vue matriciel et inversement.

Le programme valorise les interprétations géométriques en dimensions 2 et 3 et l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Familles dénombrables de vecteurs	
Famille libre, famille génératrice, base.	Extension des résultats vus en première année sur les familles finies.
Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés est libre.	Toute famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $\deg(P_k) = k$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
b) Sous-espaces vectoriels	
Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels. Somme directe. En dimension finie, base adaptée à une décomposition en somme directe.	Par définition, la somme F de p sous-espaces F_i est directe si tout vecteur de F se décompose de manière unique selon les F_i . Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Pour $p \geq 3$, toute autre caractérisation est hors programme.
c) Projecteurs et symétries	
Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Matrice dans une base adaptée. Caractérisation par les relations $p \circ p = p$ et $s \circ s = \text{id}_E$.	Détermination des éléments caractéristiques d'un projecteur, d'une symétrie.
d) Sous-espaces stables	
Sous-espace stable par un endomorphisme. Matrice dans une base adaptée.	Les étudiants doivent savoir interpréter une forme matricielle par blocs en termes de sous-espace stable, et inversement. Exemples des projecteurs et des symétries.
e) Matrices	
Trace d'une matrice carrée. Linéarité. Relation $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace. Trace d'un endomorphisme en dimension finie. Transposée d'une matrice. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit, inverse. Matrice symétrique, antisymétrique. Décomposition d'une matrice carrée comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Polynôme de matrice.	Notation $\text{Tr}(A)$. Notation A^T . Sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est l'occasion de reprendre le travail fait en première année sur l'exploitation d'un polynôme annulateur pour étudier l'inversibilité d'une matrice.

Déterminants

Cette section développe une théorie du déterminant des matrices carrées, puis des endomorphismes d'un espace de dimension finie. Il met en évidence l'aspect algébrique (caractérisation des matrices inversibles) et l'aspect géométrique (volume orienté).

Les capacités attendues sont la connaissance et l'utilisation des propriétés du déterminant permettant un calcul simple via des opérations élémentaires. Tout excès de technicité est exclu et l'outil informatique est utilisé dès que le calcul s'avère trop lourd.

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Déterminant d'une matrice carrée

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée déterminant, telle que :

- (i) le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes ;
- (ii) l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ;
- (iii) le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.

Notation $\det$.

La démonstration de ce théorème pour $n \geq 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme. Interprétation géométrique de cette définition pour $n \in \{2, 3\}$ par les notions d'aire et de volume algébriques.

b) Propriétés du déterminant

Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

Expression de $\det(\lambda A)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Effet sur un déterminant des opérations élémentaires sur les colonnes.

Déterminant d'une matrice triangulaire.

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Déterminant d'un produit de matrices carrées.

Déterminant de l'inverse d'une matrice carrée.

Déterminant de la transposée d'une matrice carrée.

Démonstration hors programme.

Démonstration hors programme.

Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes.

Développement par rapport à une colonne ou une ligne du déterminant d'une matrice.

Démonstration non exigible.

La notion de comatrice est hors programme.

c) Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.

Caractérisation des bases.

Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des automorphismes.

La formule de changement de base pour un déterminant est hors programme.

Traduction sur le déterminant d'un endomorphisme des propriétés relatives au déterminant d'une matrice.

Réduction des endomorphismes

Cette section étudie la réduction des matrices et des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Après avoir introduit le vocabulaire des éléments propres et la notion de polynôme caractéristique, on s'intéresse à la question de la diagonalisabilité, puis de la trigonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.

L'application des résultats de la réduction à la recherche des solutions d'une récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants crée un nouveau pont entre l'algèbre et l'analyse et anticipe l'étude des équations différentielles linéaires dont la résolution repose sur des outils similaires.

Tout développement sur les polynômes d'endomorphisme ou de matrice est hors programme.

Les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Éléments propres et polynôme caractéristique

Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme.

Interprétation en termes de droite stable.

Spectre.

Notation Sp .

Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Le polynôme caractéristique, défini par la fonction polynomiale

$$x \mapsto \chi_f(x) = \det(x\text{id}_E - f),$$

est de coefficient dominant égal à 1.

Les valeurs propres d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme caractéristique.

Ordre de multiplicité d'une valeur propre. Comparaison entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.

Éléments propres, spectre d'une matrice carrée.

Extension des définitions et de ces résultats aux matrices. Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et ceux de sa matrice dans une base donnée.

Lien entre racines d'un polynôme annulateur d'une matrice et son spectre.

Cas d'un projecteur ou d'une symétrie.

Le théorème de Cayley-Hamilton est hors programme.

b) Endomorphismes et matrices diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Interprétation : existence d'une base de vecteurs propres.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E .

Les projecteurs et les symétries sont des endomorphismes diagonalisables

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et si l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Extension des résultats précédents au cas des matrices carrées.

c) Endomorphismes et matrices trigonalisables

Un endomorphisme est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Démonstration hors programme.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Aucune technique de trigonalisation effective n'est au programme.

En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est trigonalisable.

Expression du déterminant et de la trace d'un endomorphisme trigonalisable en fonction des valeurs propres.

Extension des résultats au cas des matrices carrées.

d) Applications de la réduction

Si A et B sont semblables, alors il en est de même de leurs puissances.

Formule $A^n = PB^n P^{-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $A = PB P^{-1}$. Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

Structure de l'ensemble des suites numériques vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Équation caractéristique. Base de solutions.

Les étudiants peuvent utiliser librement l'expression de D^n pour D diagonale.

Application aux récurrences vectorielles d'ordre 1 de la forme $X_{n+1} = AX_n$. Les étudiants peuvent utiliser librement la relation $X_n = A^n X_0$.

On se limite au cas homogène.

Les étudiants doivent connaître la forme des solutions, à l'aide de la résolution de l'équation caractéristique.

Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

Cette section fournit l'occasion de revoir une partie des notions abordées dans le cours d'analyse de première année. L'étude des fonctions vectorielles en dimension inférieure ou égale à trois permet de présenter des résultats utiles dans les autres disciplines scientifiques et introduit le paragraphe sur les courbes paramétrées. Dans ce cadre, le but est de tracer des courbes sans support logiciel quand les calculs se prêtent à un tracé rapide. Pour les calculs plus longs, on utilise un outil informatique qui permet en plus de mettre en évidence des problèmes d'échelle et de restriction d'intervalle. L'étude des courbes définies par une équation polaire est hors programme.

a) Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Continuité et dérivabilité (éventuellement à gauche ou à droite) en un point ou sur un intervalle.

Dérivée d'une somme de deux fonctions vectorielles, du produit d'une fonction à valeurs réelles et d'une fonction à valeurs vectorielles.

Applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I . Espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$.

Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

Développement limité d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (éventuellement orienté), dérivation d'un produit scalaire, d'une norme, d'un déterminant et d'un produit vectoriel.

Ces notions sont définies à l'aide des fonctions coordonnées.

Les étudiants doivent savoir interpréter géométriquement et cinématiquement la notion de dérivée en un point.

b) Courbes paramétrées

Rappels sur les graphes de fonctions réelles d'une variable réelle, tangente à un tel graphe.

Courbe paramétrée. Tangente en un point.

Exemples de constructions d'arcs plans.

Caractérisation de la tangente à partir du premier vecteur dérivé non nul.

Cas particulier d'un point régulier.

Point stationnaire.

La tangente en un point est définie comme la limite des sécantes.

Les étudiants doivent savoir exploiter les propriétés des fonctions (parité, périodicité) afin de restreindre l'ensemble d'étude.

Hormis les cas d'asymptotes verticales et horizontales, l'étude du comportement asymptotique d'une courbe paramétrée est hors programme.

L'étude locale en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme.

Interprétation cinématique.

Position relative locale de la courbe par rapport à sa tangente.
Point régulier, d'inflexion et de rebroussement.
Longueur d'un arc paramétré régulier de classe $\mathcal{C}^1$.

Les étudiants doivent savoir utiliser les développements limités de chacune des composantes.
L'abscisse curviligne est hors programme.

Intégration sur un intervalle quelconque

L'objectif de cette section est double :

- étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées
- définir, dans le cadre des fonctions continues, la notion de fonction intégrable.

L'étude de la semi-convergence des intégrales n'est pas un objectif du programme.

Les fonctions considérées sont continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour f continue de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si $\int_a^x f$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Si f est positive sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.

Notations $\int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} f(t) dt$.

Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.

b) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.

Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Intégrales de référence : $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt$ et $\int_0^1 t^{-\alpha} dt$.

Nature et valeur de $\int_0^1 \ln(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ selon le signe de α .

Théorème de changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction φ strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\alpha, \beta[$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$ avec $a = \lim_{u \rightarrow \alpha} \varphi(u)$ et $b = \lim_{u \rightarrow \beta} \varphi(u)$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Notations $\int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$.

Intégrale convergente (resp. divergente) en b , en a .

Les intégrales de la forme $\int_0^a \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ ne font pas partie des intégrales de référence.

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

c) Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle

Intégrale absolument convergente.

La convergence absolue implique la convergence.

Démonstration non exigible.

Une fonction f est dite intégrable sur I si elle est continue sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.

Linéarité, positivité et croissance de l'application $f \mapsto \int_I f(t) dt$.

Si f est continue et intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

$$\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt.$$

Espace vectoriel des fonctions intégrables sur I .

Si f est une fonction continue et positive sur I et telle que

$$\int_I f(t) dt = 0, \text{ alors } f \text{ est identiquement nulle sur } I.$$

Pour f et g fonctions continues sur $[a, +\infty[$:

- si $|f| \leq |g|$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f .
- si $f(t) = O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f .
- si $f(t) \sim g(t)$, alors l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ est équivalente à celle de g .

Notations $\int_I f, \int_I f(t) dt$.

On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur I » et « l'intégrale $\int_I f$ converge absolument ».

Démonstration non exigible pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Le résultat s'applique en particulier si $f(t) = o(g(t))$.

Séries numériques

L'étude des séries prolonge celle des suites et prépare celle des séries entières et des séries de Fourier. Elle permet de mettre en œuvre l'analyse asymptotique. L'objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue.

L'étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.

a) Généralités

Série à termes réels ou complexes; sommes partielles. Convergence ou divergence et, en cas de convergence, somme et restes.

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Séries géométriques : sommes partielles, condition nécessaire et suffisante de convergence, valeur de la somme en cas de convergence.

Lien suite-série.

La série est notée $\sum u_n$.

En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Divergence grossière.

La suite (u_n) et la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

b) Séries à termes positifs

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs sous l'hypothèse $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang ou $u_n = o(v_n)$.

Si (u_n) et (v_n) sont positives et si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Comparaison à une série géométrique, règle de d'Alembert.

Théorème de comparaison série-intégrale : si $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive et décroissante, alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

Séries de Riemann.

Toute autre règle de comparaison est hors programme.

Exemples simples d'encadrements et d'application à l'étude asymptotique de sommes partielles ou de restes.

Les étudiants doivent savoir comparer une série à termes positifs à une série de Riemann.

c) Séries absolument convergentes

Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes.

La convergence absolue implique la convergence.

Pour une série absolument convergente $\sum u_n$,

Démonstration non exigible.

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Séries alternées

Théorème des séries alternées : si la suite réelle (u_n) converge en décroissant vers 0, alors $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Encadrement de la somme.

Séries entières

Les séries entières considérées sont à coefficients réels ou complexes. La variable est réelle ou complexe. Les objectifs de cette section sont les suivants :

- étudier la convergence d'une série entière de variable complexe et mettre en évidence la notion de rayon de convergence;
- étudier les propriétés de sa somme en se limitant au cas d'une variable réelle;
- établir les développements en série entière des fonctions usuelles.

La théorie des séries entières sera appliquée à la recherche de solutions d'équations différentielles linéaires.

a) Convergence d'une série entière

Série entière d'une variable réelle ou complexe.

Lemme d'Abel : étant donné un nombre réel $r > 0$, tel que la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée, alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence défini comme borne supérieure dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence.

Si $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n z^n$.

Si $|a_n| \sim |b_n|$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à celui de $\sum b_n z^n$.

Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.

Si le rayon de convergence R est un réel strictement positif, alors pour $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, et pour $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Toute étude systématique de la convergence sur le cercle de convergence est exclue.

Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration hors programme.

b) Somme d'une série entière d'une variable réelle

Fonction somme d'une série entière, domaine de définition.

La fonction somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence. Dérivation terme à terme.

Relation entre les coefficients et les dérivées successives en 0.

Intégration terme à terme sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

Démonstration hors programme.

Démonstration hors programme.

c) Fonctions développables en série entière

Fonction développable en série entière au voisinage de 0.

Unicité du développement en série entière.

Développements en série entière usuels :

$$\frac{1}{1-x}, \quad \ln(1+x), \quad e^x, \quad \cos(x), \quad \sin(x), \quad (1+x)^\alpha.$$

Lien avec la série de Taylor.

Les étudiants doivent savoir utiliser l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour déterminer un développement en série entière.

d) Exponentielle complexe

Développement en série entière admis :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

En première année, l'exponentielle complexe est définie par la relation

$$e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

où x et y sont deux réels quelconques.

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

Cette section est organisée autour de trois objectifs :

- introduire les notions fondamentales liées à la structure préhilbertienne;
- étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, notamment dans le cas des dimensions 2 et 3 en insistant sur les représentations géométriques;
- traiter la réduction des matrices symétriques réelles.

A - Structure préhilbertienne

a) Produit scalaire et norme

Produit scalaire.

Espace préhilbertien réel, espace euclidien.

Produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Norme associée à un produit scalaire, distance associée.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.

Identité du parallélogramme, identité de polarisation.

Notations $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$, $x \cdot y$.

Exemples de produits scalaires sur des espaces de fonctions ou de polynômes.

b) Orthogonalité

Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel F .

Théorème de Pythagore.

Famille orthogonale, famille orthonormée (ou orthonormale).

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Existence de bases orthonormées en dimension finie. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée; expression du produit scalaire et de la norme.

Notation $F^\perp$.

Les étudiants doivent savoir mettre en œuvre l'algorithme dans le cas d'un nombre restreint de vecteurs.

c) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Pour étudier la notion de projection orthogonale et la distance à un sous-espace, on s'appuie sur des figures.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée.

Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui minimise $\|x - y\|$ avec $y \in F$. Distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel F de dimension finie.

En dimension finie, dimension de l'orthogonal.

Les étudiants doivent savoir déterminer le projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur x sur un sous-espace F en calculant son expression dans une base orthonormée de F ou en résolvant un système linéaire traduisant l'orthogonalité de $x - p_F(x)$ aux vecteurs d'une famille génératrice de F .

Notation $d(x, F)$.

B - Isométries d'un espace euclidien**a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien**

Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.

Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée.

Symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace. Réflexion.

Groupe orthogonal.

On s'appuie sur des figures.

Notation $O(E)$.

On vérifie ici les propriétés conférant à $O(E)$ une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Si un sous-espace est stable par une isométrie vectorielle, son orthogonal est stable par cette isométrie.

b) Matrices orthogonales

Matrice orthogonale : définition par l'égalité $A^T A = I_n$.

Traduction sur les colonnes ou les lignes de A .

Groupe orthogonal d'ordre n .

Si $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormée de E , une base $\mathcal{B}$ de E est orthonormée si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est orthogonale.

Notations $O_n(\mathbb{R})$, $O(n)$.

Si $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormée de E et u un endomorphisme de E , alors u est une isométrie vectorielle de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ est orthogonale.

Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie vectorielle.

Isométrie vectorielle directe, indirecte. Groupe spécial orthogonal.

Application à l'orientation d'un espace euclidien et à la notion de base orthonormée directe.

Notations $\text{SO}_n(\mathbb{R})$, $\text{SO}(n)$ et $\text{SO}(E)$.

c) Classification en dimensions 2 et 3

Description du groupe orthogonal en dimensions 2 et 3. Caractérisation des symétries orthogonales par leurs représentations matricielles.

Utilisation des éléments propres pour la classification des isométries.

Les étudiants doivent savoir déterminer les caractéristiques géométriques d'une isométrie.

d) Matrices symétriques réelles

Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont toutes réelles.

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

Théorème spectral : pour toute matrice symétrique réelle A , il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

Démonstration non exigible.

Démonstration hors programme. La notion d'endomorphisme symétrique est hors programme.

Séries de Fourier

L'étude des séries de Fourier est présentée dans le cadre des fonctions T -périodiques, continues par morceaux et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cette section développe des compétences de calcul à travers celui des coefficients de Fourier et l'application du théorème de Parseval. L'interprétation géométrique de la n -ième somme de Fourier comme projection orthogonale relie les points de vue analytique et géométrique de la théorie. Cette section est aussi particulièrement favorable aux interactions entre les disciplines.

a) Fonctions définies par morceaux

Une fonction à valeurs réelles définie sur un segment $[a, b]$ à est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction continue (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Une fonction à valeurs réelles T -périodique est dite continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$) si elle est continue par morceaux (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur une période. Espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, T -périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$).

Intégrale sur une période d'une fonction T -périodique et continue par morceaux.

Interprétation graphique.

Extension rapide de la définition et des propriétés de l'intégrale au cas des fonctions continues par morceaux.

b) Coefficients et séries de Fourier

Coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction continue par morceaux T -périodique.

Notation $a_k(f)$ et $b_k(f)$ ou, plus simplement, a_k et b_k . Le coefficient a_0 est défini comme la valeur moyenne sur une période.

Cas des fonctions paires, impaires.

Série de Fourier d'une fonction f continue par morceaux T -périodique. Sommes partielles : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$S_n(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \text{ où } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Dans le cas des fonctions continues, interprétation géométrique de $S_n(f)$ comme la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto \cos(k\omega t)$ et $t \mapsto \sin(k\omega t)$ ($k \in \llbracket 0, n \rrbracket$) pour le produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt$.

c) Théorèmes de convergence

Théorème de Parseval : si f est une fonction T -périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Théorème de Dirichlet : si f est une fonction T -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge en tout point et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} (f(t+h) + f(t-h))$$

Cas où f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Démonstration hors programme.

Interprétation géométrique du théorème de Parseval dans le cas des fonctions continues.

Les étudiants doivent savoir appliquer ce résultat pour calculer la somme de certaines séries numériques.

Démonstration hors programme.

On appelle régularisée de f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} (f(t+h) + f(t-h))$.

Les étudiants doivent savoir appliquer ce résultat pour calculer la somme de certaines séries numériques.

Probabilités

A - Compléments sur les variables aléatoires réelles finies

Cette sous-section a pour objectifs de consolider les acquis de première année sur les variables aléatoires réelles finies et d'étendre les résultats au cas de n variables aléatoires. Dans ce cadre, l'accent est mis sur les couples. Les vecteurs aléatoires ne sont introduits que dans le but d'interpréter une loi binomiale comme une somme de lois de Bernoulli indépendantes. La notion d'espace probabilisé produit n'est pas au programme. L'univers est supposé fini.

a) Couple de variables aléatoires

Couple de variables aléatoires.

Loi du couple ou loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires.

Loi conditionnelle de Y sachant ($X = x$).

Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

La loi conjointe de X et Y est la loi de (X, Y) , les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et Y .

Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.

b) Variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires indépendantes : pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Si X et Y sont indépendantes, pour tout $(A, B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

Démonstration hors programme.

$$P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Si X et Y sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Démonstration hors programme.

Variables aléatoires indépendantes :

si $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i).$$

Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

Démonstration hors programme.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Les étudiants doivent savoir interpréter une loi binomiale comme une somme de lois de Bernoulli indépendantes.

c) Covariance

Covariance d'un couple de variables aléatoires.

Notation $\text{Cov}(X, Y)$.

Variance de $aX + bY$.

Si X et Y sont indépendantes,

Les réciproques sont fausses en général.

$$E(XY) = E(X)E(Y); \quad \text{Cov}(X, Y) = 0;$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

B - Probabilités sur un univers dénombrable

On aborde dans cette sous-section l'étude des probabilités sur un univers dénombrable afin de modéliser les processus stochastiques à temps discret. Les résultats démontrés en première année dans le cadre d'un univers fini sont étendus sans démonstration. La construction d'espaces probabilisés modélisant notamment une suite d'expériences aléatoires indépendantes est hors de portée à ce niveau. On se limite au cas où l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de Ω . La notion de tribu est hors programme.

a) Espaces probabilisés dénombrables

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Un ensemble fini ou dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Dénombrabilité de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$.

On signale que les intervalles ne sont pas dénombrables. Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.

Expérience aléatoire, événements.

Extension des définitions vues en première année.

Suite infinie d'événements; union et intersection.

Les étudiants doivent faire le lien entre point de vue probabiliste et point de vue ensembliste.

Système complet d'événements.

On appelle probabilité sur Ω toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

b) Indépendance et conditionnement

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Formule des probabilités composées.

Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et,

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B) P(A_n).$$

Formule de Bayes : si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, alors,

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) P(A)}{P(B)}.$$

Indépendance de deux événements.

Indépendance d'une famille finie d'événements.

L'application P_B est une probabilité.

Brève extension des résultats vus dans le cadre d'un univers fini.

La formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.

Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P_B(A) = P(A)$.

L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance si $n \geq 3$.

C - Variables aléatoires discrètes

L'utilisation de variables aléatoires pour modéliser des situations simples dépendant du hasard fait partie des capacités attendues des étudiants. On se limite en pratique aux variables aléatoires définies sur un univers dénombrable.

a) Variable aléatoire réelle

Une variable aléatoire réelle X est une application définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Loi de probabilité.

L'application P_X est définie par la donnée des $P(X = x)$ pour x dans $X(\Omega)$.

Lien entre $P(X \leq x)$, $P(X \leq x - 1)$ et $P(X = x)$ pour une variable aléatoire réelle discrète à valeurs entières.

Image d'une variable aléatoire par une application.

Notation P_X .

Si f est une application à valeurs réelles, on admet que $f(X)$ est une variable aléatoire et on se limite aux cas simples du type X^2 et X^3 .

b) Espérance

La variable aléatoire réelle X est dite d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas, on appelle espérance de X le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.

Linéarité de l'espérance.

Théorème du transfert : si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ de X , alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X = x_n) f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a :

$$E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) f(x_n).$$

On admet que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération.
Notation $E(X)$.

Démonstration hors programme.

Démonstration hors programme.

Les étudiants doivent savoir calculer une espérance en appliquant le théorème du transfert.

c) Variance et écart type d'une variable aléatoire

Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.

Lorsque X^2 est d'espérance finie, alors $(X - E(X))^2$ est d'espérance finie et on appelle variance de X le réel $E((X - E(X))^2)$.

Relation $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ (Koenig-Huygens).

Interpréter la variance comme indicateur de dispersion.

Écart type d'une variable aléatoire.

$V(aX + b) = a^2 V(X)$ pour a et b réels.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Notation $V(X)$.

L'inégalité de Markov n'est pas au programme.

d) Lois usuelles

Pour $p \in]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p : la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, loi de Poisson de paramètre λ : la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Espérance et variance d'une loi géométrique, d'une loi de Poisson.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Les étudiants doivent savoir reconnaître des situations modélisables par une loi géométrique.

La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p . On remarquera que cette interprétation requiert l'existence d'une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables de Bernoulli indépendantes, donc un univers non dénombrable. Elle est donnée à titre heuristique.

Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Illustration numérique de l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson pour certains paramètres (loi des événements rares).

Équations différentielles linéaires

L'étude des équations différentielles est limitée au cas linéaire en raison de son importance dans d'autres champs disciplinaires.

Cette section donne l'occasion de faire le lien avec les résultats de première année dans le cas des coefficients constants.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + a(t)y = b(t),$$

où a et b sont des fonctions réelles ou complexes, définies et continues sur un intervalle I .

Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Structure de l'ensemble des solutions.

Méthode de variation de la constante.

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour une équation de la forme $y' + a(t)y = b(t)$.

Équation homogène associée.

Détermination des solutions.

Plan de résolution.

Le raccordement de solutions est hors programme.

Détermination de la solution vérifiant une condition initiale donnée.

b) Équations différentielles d'ordre 2

Équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t),$$

où a , b , c sont des fonctions réelles ou complexes, définies et continues sur un intervalle I .

Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Structure de l'ensemble des solutions.

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour une équation de la forme $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.

Résolution complète par abaissement de l'ordre dans le cas où une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas est connue.

Exemples de résolution d'équations différentielles par changement de variable.

Équation homogène associée.

Le raccordement de solutions est hors programme.

Recherche de solutions particulières polynomiales ou développables en série entière.

Démonstration hors programme.

On donne toute indication utile.

On donne toute indication utile.

c) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Écriture sous la forme $X' = AX$ où A est une matrice carrée réelle ou complexe à coefficients constants.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Structure de l'ensemble des solutions.

Équivalence entre une équation scalaire d'ordre n et un système de n équations d'ordre 1.

Cas particulier des équations différentielles linéaires d'ordre 2 homogènes à coefficients constants.

Démonstration hors programme.

Pratique guidée de la résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable ou trigonalisable.

Lien avec la forme des solutions d'une équation scalaire d'ordre 2 étudiée en première année.

Fonctions de plusieurs variables

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'étude des fonctions de plusieurs variables se veut résolument pratique : présentation de recherche d'extremums, résolution d'équations aux dérivées partielles simples, application à l'étude de certaines courbes et surfaces.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$ ($n \leq 3$)

Norme et distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.	Tout développement sur les normes non euclidiennes est hors programme.
Boule ouverte, boule fermée.	
Partie bornée de $\mathbb{R}^n$.	
Partie ouverte, partie fermée.	
Point intérieur, point extérieur, point adhérent. Intérieur, frontière (ou bord) d'une partie de $\mathbb{R}^n$.	Chaque définition est assortie d'une figure. Les caractérisations séquentielles sont hors programme.

b) Limite et continuité

Limite en un point adhérent, continuité en un point, continuité sur une partie.	L'étude de la continuité d'une fonction de plusieurs variables n'est pas un attendu du programme.
Opérations.	
Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ est bornée et atteint ses bornes.	

c) Dérivées partielles

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point intérieur.	Notations $\partial_i f(a)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. La notion de différentielle en un point est hors programme. Notation ∇f .
Gradient.	
Point critique.	
Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert. Opérations.	
Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.	Existence admise.
Dérivée de $t \mapsto f(x(t), y(t))$.	
Dérivées partielles de $(u, v) \mapsto h(f(u, v), g(u, v))$.	Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires et savoir étendre les deux résultats précédents au cas de trois variables.
Dérivées partielles d'ordre 2 en un point intérieur.	Notations $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\partial_1 \partial_2 f$.
Fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Opérations.	
Théorème de Schwarz.	Démonstration hors programme.

d) Équations aux dérivées partielles

Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.	Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables suggéré dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires.
---	--

e) Extremums d'une fonction de deux variables

Si une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.

Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.

f) Applications géométriques

Courbe du plan définie par une équation $f(x, y) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$.

Point régulier.

Tangente en un point régulier définie comme la droite orthogonale au gradient et passant par le point.

En un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau $f(x, y) = \lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f .

Surface définie par une équation $f(x, y, z) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$.

Point régulier.

Plan tangent à une surface en un point régulier défini comme le plan orthogonal au gradient et passant par le point.

Position relative locale entre une surface d'équation $z = g(x, y)$ et son plan tangent.

Cas particulier des courbes d'équation $y = g(x)$.

En admettant l'existence d'un paramétrage local de classe $\mathcal{C}^1$, lien avec la tangente à un arc paramétré.
Démonstration hors programme.

Cas particulier des surfaces d'équation $z = g(x, y)$.