Fiche Outil #3 : systèmes de coordonnées

1 Les coordonnées cartésiennes

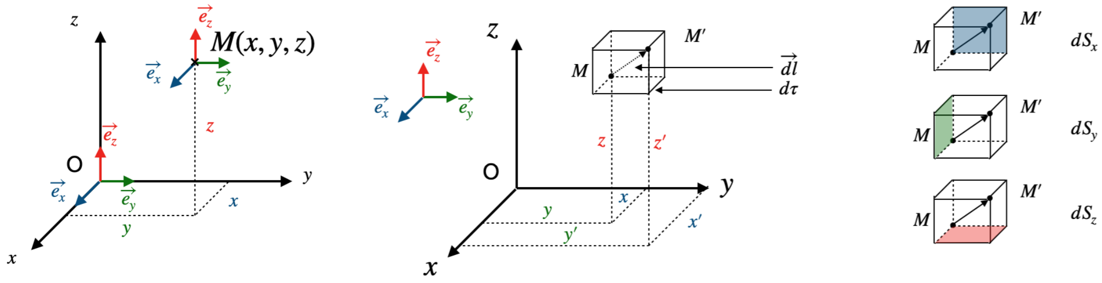

FIGURE 1 – Coordonnées cartésiennes

Un point M de l’espace est repéré par le triplet (x, y, z), ainsi le vecteur position est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{OM} = \underset{(x,y,z)}{\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right.}$$

avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Le vecteur déplacement élémentaire s’exprime :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}$$

Le volume élémentaire se retrouve en multipliant les trois composantes du vecteur déplacement élémentaire :

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Les surfaces élémentaires se retrouvent en multipliant les composantes qui varient. Par exemple, la surface à x constant est :

$$\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Et donc :

$$\mathrm{d}S_y = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}S_z = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

2 Les coordonnées cylindriques

Un point M de l'espace est repéré par le triplet (r, θ, z), ainsi le vecteur position est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{OM} \underset{(r,\theta,z)}{=} \left| \begin{array}{l} r \\ 0 \\ z \end{array} \right.$$

avec $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $z \in \mathbb{R}$. Remarque : il est possible de prendre $\theta \in [-\pi, \pi]$ sans influence sur le résultat.

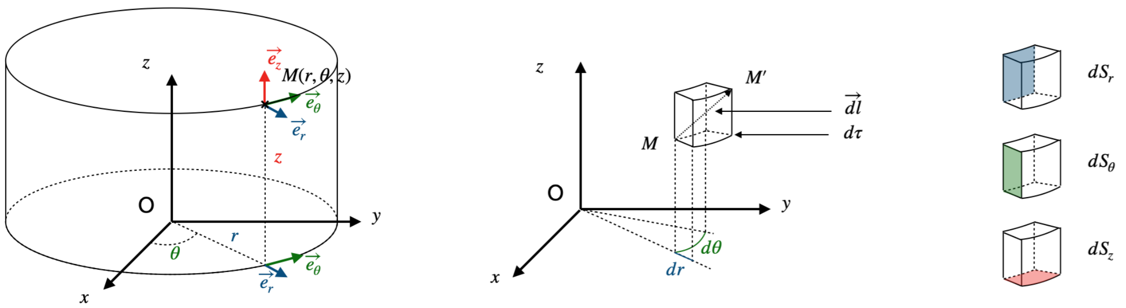

FIGURE 2 – Coordonnées cylindriques

Passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes :

$$\left| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{array} \right.$$
$$\left| \begin{array}{c} r \\ \theta \\ z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan\dfrac{y}{x} \\ z \end{array} \right.$$

Le vecteur déplacement élémentaire s'exprime :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}$$

Le volume élémentaire se retrouve en multipliant les trois composantes du vecteur déplacement élémentaire :

$$\mathrm{d}\tau = (\mathrm{d}r)\,(r\,\mathrm{d}\theta)\,(\mathrm{d}z)$$

Les surfaces élémentaires se retrouvent en multipliant les composantes qui varient. Par exemple, la surface à r constant est :

$$\mathrm{d}S_r = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

Et donc :

$$\mathrm{d}S_\theta = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}S_z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

Aller plus loin : quelle est l'expression des vecteurs $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_z}$en fonction des vecteurs de base $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$?

3 Les coordonnées polaires

Les coordonnées polaires coïncident avec les coordonnées cylindriques dans un plan $z = C^{ste}$. Tout le paragraphe précédent permet de retrouver rapidement les résultats nécessaires.

4 Les coordonnées sphériques

Un point M de l'espace est repéré par le triplet (r, θ, φ), ainsi le vecteur position est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$$

$$\overrightarrow{OM} = \underset{(r,\theta,\varphi)}{\left|\begin{array}{l} r \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.}$$

avec $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$.
Remarque : il est possible de prendre $\varphi \in [-\pi, \pi]$ sans influence sur le résultat. [1]

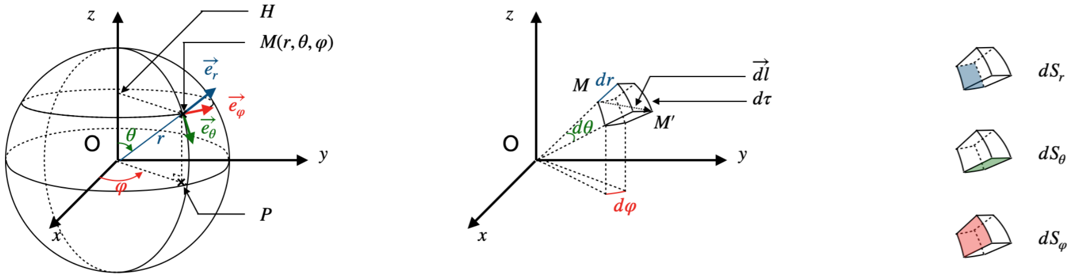

FIGURE 3 – Coordonnées cartésiennes. P est le projeté de M dans le plan (x, y), et H est le projeté de M sur l'axe (O, z).

Passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes :

$$\left|\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right. = \left|\begin{array}{c} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{c} r \\ \theta \\ \varphi \end{array}\right. = \left|\begin{array}{c} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \arccos\dfrac{z}{r} = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \arctan\dfrac{y}{x} \end{array}\right.$$

Le vecteur déplacement élémentaire s'exprime :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

1. En revanche θ doit être défini de 0 à π pour décrire tout l'espace du pôle Nord au pôle Sud. C'est un choix mathématique. Si θ est défini de 0 à 2π, le $\sin\theta$ parcours une fois la sphère positivement, une fois négativement, ce qui engendre des résultats contre-intuitifs. Par exemple, la surface d'une sphère serait nulle : $S = \iint r^2\ sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 0 \neq 4\pi r^2$.

Pour retrouver le dernier terme 'rapidement' est possible de voir que la distance $||\overrightarrow{HM}|| = r\sin\theta$.

Le volume élémentaire se retrouve en multipliant les trois composantes du vecteur déplacement élémentaire :

$$\mathrm{d}\tau = (\mathrm{d}r)\,(r\,\mathrm{d}\theta)\,(r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi)$$

Les surfaces élémentaires se retrouvent en multipliant les composantes qui varient. Par exemple, la surface à r constant est :

$$\mathrm{d}S_r = (r\,\mathrm{d}\theta)\,(r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi)$$

Et donc :

$$\mathrm{d}S_\theta = (\mathrm{d}r)\,(r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi)$$
$$\mathrm{d}S_\varphi = (\mathrm{d}r)\,(r\,\mathrm{d}\theta)$$

Aller plus loin : quelle est l'expression des vecteurs $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$et $\overrightarrow{e_\varphi}$en fonction des vecteurs de base $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$?

5 Complément : la fonction $\arctan$

La fonction *tangente n'est définie que sur* $[-\pi/2, \pi/2]$*. Ainsi, la question est : comment obtenir un angle* θ *variant de* $[-\pi, \pi]$ *avec la formule :*

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

Nous devons distinguer les cas :

$$\theta = \begin{cases} \arctan y/x & \textit{si} \quad x > 0 \\ \pi/2 & \textit{si } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \textit{si } x = 0,\ y < 0 \\ \arctan y/x + \pi & \textit{si } x < 0,\ y > 0 \\ \arctan y/x - \pi & \textit{si } x < 0,\ y < 0 \\ 0 & \textit{si } x > 0,\ y = 0 \\ \pi & \textit{si } x < 0,\ y = 0 \end{cases}$$

⚠ *Ces formules ne sont plus valables si* $\theta \in (0, 2\pi)$*. Je vous invite donc fortement à comprendre la construction plutôt que de l'apprendre par* ♡ *.*

Idée pour la construction :

- ⇝ *Pour les 3 premiers cas, pas de difficultés ;*
- ⇝ *Pour le cas* $x < 0, y > 0$*, la fonction* $\arctan$ *va renvoyer un angle* α *(voir figure 4) comme si* $x > 0$ *et* $y < 0$ *puisqu'elle ne renvoie que des angles entre* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$*.*
  Il faut ainsi ajouter π *à* $\alpha = \arctan(y/x)$ *pour obtenir l'angle* θ *;*
- ⇝ *Le cas suivant se construit de la même manière ;*
- ⇝ *Les deux derniers cas correspondent aux cas où* $\arctan(0) = 0[\pi]$*, il faut choisir en fonction du signe de* x*.*

Dans numpy*, la fonction* atan2(y,x) *est déjà implémentée et permet d'éviter tous soucis.*

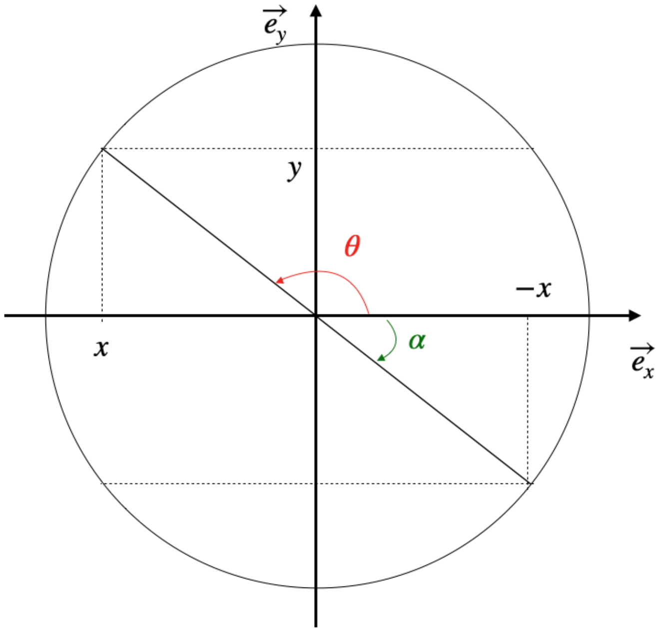

FIGURE 4 – Cercle unité pour retrouver l'angle θ

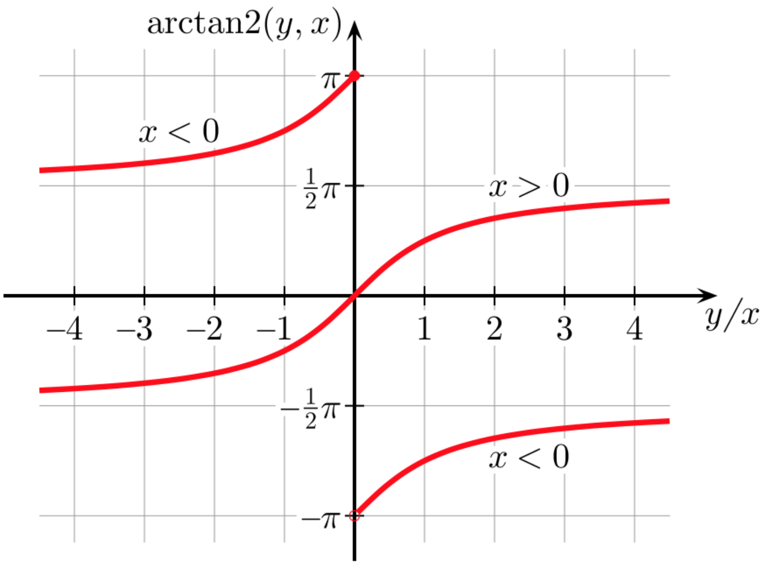

FIGURE 5 – Représentation de *atan2*, source : Wikipédia