E4 | Électrocinétique

Circuits linéaires du deuxième ordre : l'oscillateur harmonique amorti

Prérequis

Bases de l'électrocinétiques	Chapitre E1 à E3
Méthode de mise en équation d'un circuit électrocinétiques	Chapitre E1 à E4
L'oscillateur harmonique (non amorti)	Chapitre E4
Notions énergétiques des circuits	Chapitre E1 et E2
Notion mathématique : dérivées, intégrales des fonctions usuelles	FO7
Notion mathématique : trigonométrie	FO5
Notion mathématique : résolution d'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants	Math

Plan

Savoirs

Les trois écritures d'une équation différentielle harmonique canonique avec les différents termes : λ facteur d'amortissement, α coefficient d'amortissement, Q facteur de qualité et ω_0 la pulsation propre	///
Donner la forme des solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 pour $\Delta > 0$	///

- Donner la forme des solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 pour $\Delta = 0$ — *III*
- Donner la forme des solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 pour $\Delta < 0$ — *III*
- Connaitre le nom des trois régime : pseudo-périodique ($\Delta < 0$, apériodique $\Delta > 0$ et critique $\Delta = 0$) — *IV*
- Pour le cas où $\Delta < 0$, interpréter la pseudo-période — *IV*
- Le temps de retour à l'équilibre est le plus court pour le régime critique — *IV*

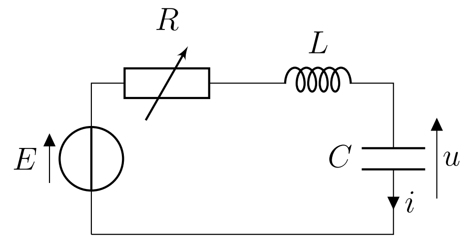
Savoir-Faire

- Observer expérimentalement le comportement d'un oscillateur amorti — *II*
- Identifier une équation différentielle d'ordre 2, la mettre sous forme canonique et identifier les grandeurs d'intérêt λ, α, Q et ω_0 — *III*
- Déterminer le polynôme caractéristique d'une équation différentielle d'ordre 2 et calculer son discriminant Δ — *III*
- Déterminer l'équation différentielle d'un circuit RLC — *IV & V*
- Déterminer la forme des solutions homogène et particulière pour en déduire une solution générale — *IV & V*
- Déterminer, à partir des conditions initiales, la solution unique — *IV & V*
- Faire un bilan énergétique sur un circuit RLC : multiplier la loi des mailles par i — *VI*

Application 1 : Equation différentielle d'un circuit RLC

Énoncé

Soit le circuit ci-dessous :



À l'instant initial, nous éteignons le générateur qui était auparavant allumé depuis longtemps.

(1) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur u ?

(2) Identifier le facteur de qualité Q, le facteur d'amortissement λ et la pulsation propre ω_0.

(3) Montrer que le facteur de qualité est sans dimension.

(4) Montrer que la pulsation propre est homogène à l'inverse d'un temps.

Solution

(1) Nous injectons les lois de comportement dans la loi des

mailles à $t > 0$:

$$0 = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u$$
$$0 = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + u$$

2 Nous mettons sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = 0$$

Par identification :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$2\lambda = \frac{R}{L}$$
$$\text{donc :} \quad \lambda = \frac{1}{2}\frac{R}{L}$$
$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$
$$\text{donc :} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

3

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$
$$\text{donc} \quad [C] = \left[\frac{it}{u}\right] u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$
$$\text{donc} \quad [L] = \left[\frac{ut}{i}\right] u = Ri$$
$$\text{donc} \quad [R] = \left[\frac{u}{i}\right]$$

Donc l'unité que Q est :

$$[Q] = \left[\frac{i}{u}\sqrt{\frac{u^2}{i^2}}\right] = 1$$

4 En utilisant les résultats de la question précédente, nous montrons que :

$$[\omega_0] = \left[\frac{1}{\sqrt{t^2}}\right] = \left[\frac{1}{t}\right]$$

Application 2 : Résolution du circuit RLC pour $\Delta > 0$

Énoncé Nous étudions le même montage que dans l'application 1. Nous donnons l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur :

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

1 Donner le polynôme caractéristique.
2 Pour quelles valeurs de Q avons-nous le discriminant $\Delta > 0$?
3 Donner la forme des solutions dans ce cas. Montrer que la solution converge.
4 À partir des conditions initiales, déterminer la solution complète.
5 Tracer l'allure de la solution.

Solution

1

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

2

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$$
$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right)$$

Si $\Delta > 0$ alors :

$$1 - 4Q^2 > 0$$
$$\text{soit} \quad Q < 1/2$$

3 Si le discriminant est positif, les solutions sont de la forme :

$$u(t) = A\,\mathrm{e}^{r_1 t} + B\,\mathrm{e}^{r_2 t}$$

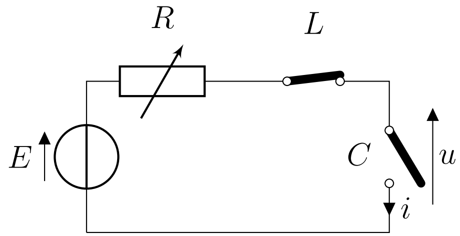
Avec r_1 et r_2 les racines du polynôme caractéristique.

$$r_{1,2} = \frac{-\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2}\,()}$$
$$= \frac{\omega_0}{2Q}(-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}) < 0 \quad \forall \quad Q \in [0;1/2]$$

Ainsi, la tension $u(t)$ se compose de deux exponentielles décroissantes, et donc converge vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

4 Quelles sont les conditions initiales.

À $t = 0^-$, le circuit est équivalent à :



Ainsi $i(0^-) = 0$ car l'interrupteur est ouvert.

Et la loi de maille donne :

$$E = \underset{\uparrow\, i(0^-)=0}{\cancel{Ri}} + u(0^-)$$
$$u(0^-) = E$$

Or par continuité du courant qui traverse la bobine $i(0^+) = i(0^-) = 0$ et par continuité de la tension aux bornes du condensateur $u(0^+) = u(0^-) = E$.

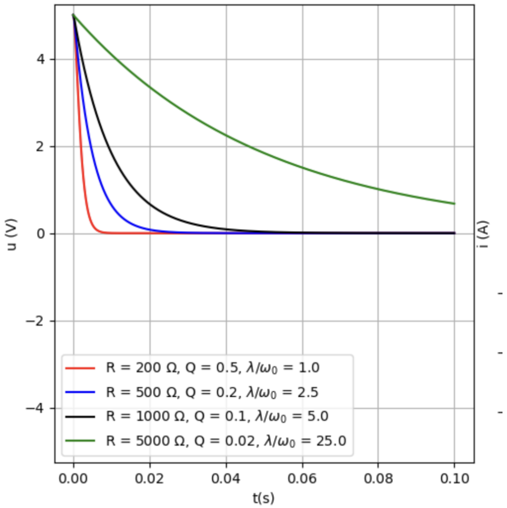
Donc :

$$E = A + B$$
$$0 = Ar_1 + Br_2$$
$$\Leftrightarrow B = -\frac{r_1}{r_2}A$$
$$\text{d'où} \quad E = A\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)$$
$$E = \frac{A}{r_2}A\left(r_2 - r_1\right)$$
$$A = \frac{r_2 E}{r_2 - r_1}$$
$$\text{et} \quad B = \frac{r_1 E}{r_1 - r_2}$$

Au final :

$$u(t) = \frac{E}{r_2 - r_1}\left(r_2\,\mathrm{e}^{r_1 t} - r_1\,\mathrm{e}^{r_2}\right)$$

(5) Tracé pour $L = 100\,\mathrm{mH}$, et $C = 10\,\mu\mathrm{F}$ pour différentes valeurs de la résistance :



Application 3 : Résolution du circuit RLC pour $\Delta = 0$

Énoncé

Nous étudions le même montage que dans l'application 1. Nous donnons l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur :

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

(1) Donner le polynôme caractéristique.
(2) Pour quelles valeurs de Q avons-nous le discriminant $\Delta = 0$?
(3) Donner la forme des solutions dans ce cas.
(4) À partir des conditions initiales, déterminer la solution complète.
(5) Tracer l'allure de la solution.

Solution

(1)

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

(2)

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right)$$

Si $\Delta = 0$ alors :

$$1 - 4Q^2 = 0$$

$$\text{soit} \quad Q = 1/2$$

(3) Si le discriminant est nul, les solutions sont de la forme :

$$u(t) = (At + B)\,\mathrm{e}^{rt}$$

où r est la solution double du polynôme caractéristique.

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

donc :

$$u(t) = (At + B)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$

4
De la même façon qu'à l'application 2, les conditions initiales sont :

$$u(0^+) = E$$
$$i(0^+) = 0$$

D'où nous pouvons déterminer les coefficients A et B :

$$B = E$$
$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$
$$i(t) = C\left(A\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t} - (At + E)\omega_0\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}\right)$$
$$i(0) = 0 = A - E\omega_0$$
$$A = E\omega_0$$

Finalement :

$$u(t) = E\left[\omega_0 t + 1\right]\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$

5 Le tracé est représenté en rouge sur la figure de l'application 2.

Application 4 : Résolution du circuit RLC pour $\Delta < 0$

Énoncé

Nous étudions le même montage que dans l'application 1. Nous donnons l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur :

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

1 Donner le polynôme caractéristique.

2 Pour quelles valeurs de Q avons-nous le discriminant $\Delta < 0$?

3 Donner la forme des solutions dans ce cas. Déterminer la pseudo-période des oscillations.

4 À partir des conditions initiales, déterminer la solution complète.

5 Tracer l'allure de la solution.

Solution

1

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

2

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$$
$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right)$$

Si $\Delta < 0$ alors :

$$1 - 4Q^2 < 0$$
$$\text{soit} \quad Q > 1/2$$

3 Si le discriminant est négatif, les solutions sont de la forme :

$$u(t) = (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\, e^{\mu t}$$

avec μ et Ω la partie réelle et imaginaire de la solution du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} r &= -b/2a \pm i\frac{1}{2a}\sqrt{-\Delta} \\ r &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\frac{\omega_0}{2Q}\left(4Q^2 - 1\right) \\ r &= -\lambda \pm i\left(\omega_0^2 - \lambda^2\right) \\ r &= \mu \pm i\Omega \\ \text{donc} \quad \Omega &= \left(\omega_0^2 - \lambda^2\right) \\ \mu &= -\lambda \end{aligned}$$

La pseudo-période correspond à la période d'oscillation dans les cosinus / sinus :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

4 Les conditions initiales sont les mêmes que pour les applications précédentes :

$$u(0^+) = E$$
$$i(0^+) = 0$$

D'où l'on tire les coefficients A et B :

$$\begin{aligned} u(0) &= A = E \\ i(t) &= C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\ &= \left[-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)\right]\exp(-\lambda t) \\ &\quad - \left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]\lambda\exp(-\lambda t) \\ i(0) &= B\Omega - A\lambda = 0 \\ \text{d'où} \quad B &= \frac{E\lambda}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \end{aligned}$$

Finalement :

$$u(t) = E\left[\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}\sin(\Omega t)\right]\exp(-\lambda t)$$

5 Tracé pour $L = 100\,\text{mH}$, et $C = 10\,\mu\text{F}$ pour différentes valeurs de la résistance :