



TD E5 | Électrocinétique



Régime sinusoïdal forcé

🏠 exercice sera corrigé en TD ;

♥ exercice classique / important ; à maîtriser pour les concours ;

⚙️⚙️⚙️ niveau de difficulté de l'exercice.

Les exercices issus du *cahier d'entraînement* sont à retrouver :

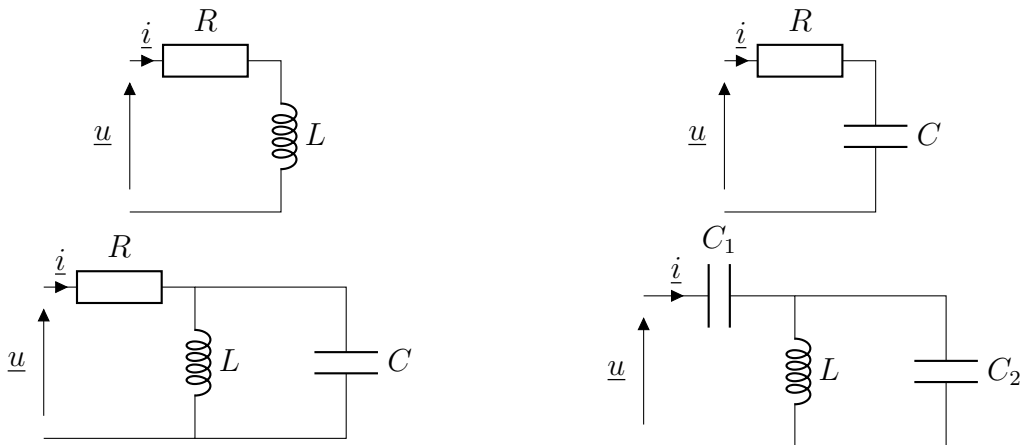


Les exercices pouvant être exploités sont : 5.1 à 5.6

Exercice 1 : Calculs d'impédances



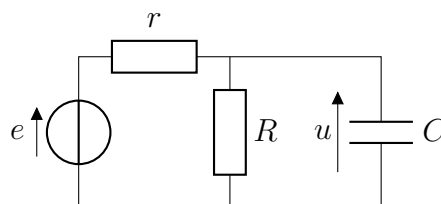
Pour chacun des cas ci-dessous, déterminer l'impédance équivalente.



Exercice 2 : Étude d'un circuit



Nous étudions un circuit ci-dessous :



La tension d'entrée  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ .

- 1 Donner la représentation complexe de  $\underline{e}$  de  $e(t)$ .
- 2 Déterminer  $u(t)$  en régime sinusoïdal forcé.

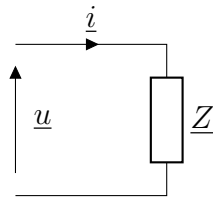
③ Vérifier votre résultat par une étude asymptotique (comportement à haute et basse fréquence).

**Exercice 3 : Facteur de puissance**



*inspiré de M.N. Sanz*

Considérons un réseau d'impédance  $\underline{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$  à caractère inductif :  $X > 0$ .



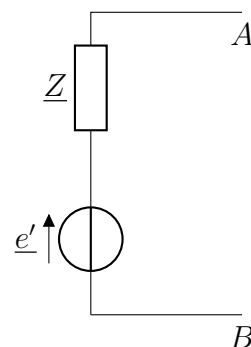
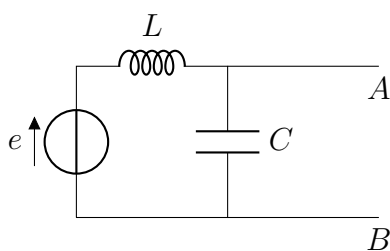
On souhaite relever le facteur de puissance de ce réseau, c'est-à-dire donner à  $\cos(\varphi)$  une valeur égale à l'unité sans dépense d'énergie.  $\varphi$  est le déphasage du courant par rapport à la tension :  $\varphi = \arg\left(\frac{i}{u}\right)$ .

- ① Calculer, en fonction de  $R$ ,  $X$  et  $\omega$ , la capacité  $C_1$  à placer en parallèle sur le réseau pour que son facteur de puissance devienne égal à 1.
- ② Quelle capacité  $C_2$  aurait-il fallu placer en série sur le réseau pour obtenir le même résultat ?
- ③ Quelle solution est retenue ? Justifier.

**Exercice 4 : Dipole équivalent**



*inspiré de T.Finot*



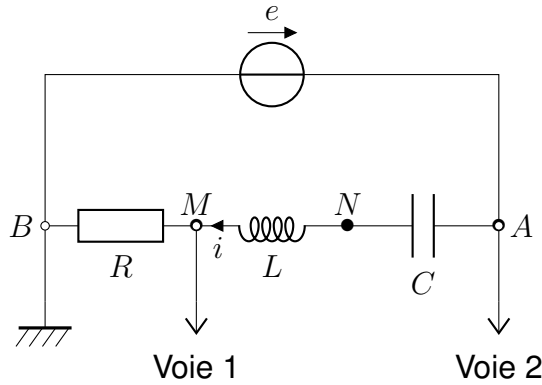
La source de tension est sinusoïdale telle que  $e(t) = E \cos(\omega t + \varphi_e)$  et sa représentation complexe est  $\underline{e} = \underline{E} e^{j\omega t}$ .

- ① Rappeler la signification de  $\underline{E}$  et donner son expression.
- ② Déterminer la source  $\underline{e}'$  et l'impédance  $\underline{Z}$  en fonction  $\underline{E}$ ,  $L$ ,  $C$  et  $\omega$  pour que les deux montages soient équivalents.

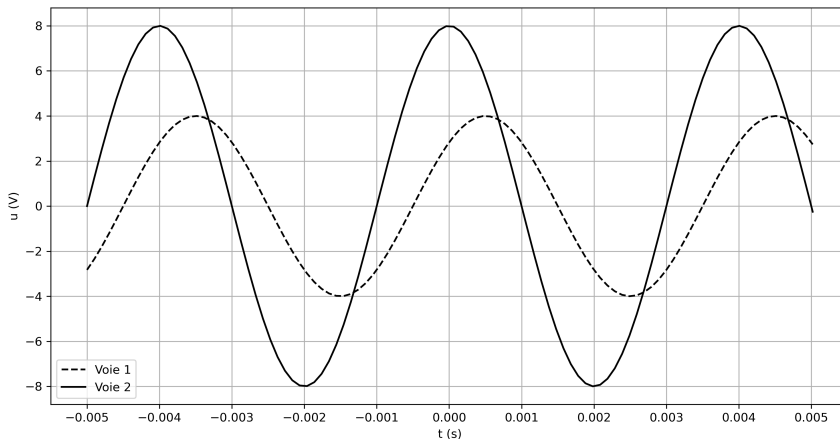
**Exercice 5 : Caractéristique d'une bobine** ⚙️

*inspiré de T.Finot*

Nous cherchons à déterminer l'inductance propre  $L$  d'une bobine à l'aide du montage suivant :



Le générateur délivre une tension  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ . Données :  $R = 20 \omega$  et  $C = 10 \mu\text{F}$ .

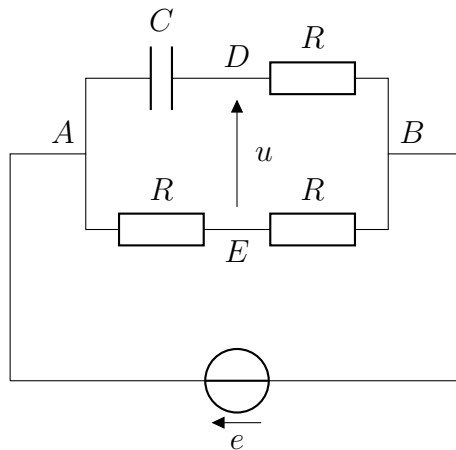


- ① Justifier que le courant est de la forme  $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ .
- ② À partir de l'oscillogramme, déterminer les valeurs de la période  $T$ , de la pulsation  $\omega$ , de l'amplitude  $E_0$ , et l'amplitude  $I_0$  et de l'impédance réelle  $Z_{AB}$ .
- ③ La tension de quelle voie est en avance sur l'autre ?
- ④ Déterminer le déphasage,  $\varphi$ , entre le courant  $i$  et la tension  $u$ .
- ⑤ Montrer que si nous supposons la bobine  $L$  idéale, sans résistance interne  $r$ , alors les résultats précédents sont incohérents.
- ⑥ Déterminer alors  $r$  et  $L$ .

**Exercice 6 : Étude d'un pont**



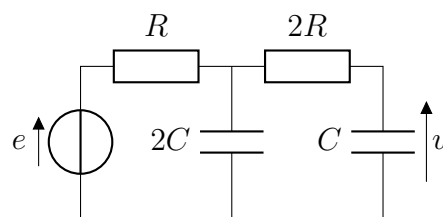
inspiré de T.Finot



Nous imposons une tension d'entrée  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ .

- ① Justifier, qu'en régime permanent, la tension  $u$  est de la forme  $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$ .
- ② Déterminer  $U_0$  et  $\varphi$  en fonction de  $C, R, \omega$  et  $E_0$ .
- ③ Pour quelle valeur de  $\omega$  les tension  $u$  et  $e$  sont-elles en quadrature de phase ?

**Exercice 7 : Équation différentielle : réels ou complexes ?**



En utilisant les complexes, montrer que la tension  $u$  est solution de l'équation différentielle :

$$4\tau^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 5\tau \frac{du}{dt} + u = e \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

**Exercice 8 : Système masse-ressort**



Soit une bille, de masse  $m$ , attachée à un ressort  $(k, \ell_0)$  contrainte à se déplacer horizontalement dans la direction  $x$ .

Elle subit également une force de frottement visqueux par l'air de la forme  $\vec{f} = -h\vec{v}$ .

L'autre extrémité du ressort est attaché à un point  $A$  qui oscille au cours du temps, tel que  $x_A(t) = x_0 \cos(\omega t)$ .

- ① Établir l'équation différentielle vérifiée par la position de la bille  $x_M(t)$ . Vous introduirez une pulsation propre  $\omega_0$  et un facteur de qualité  $Q$ .
- ② Déterminer  $x_M(t)$  en régime permanent.
- ③ Quelle est la forme complète des solutions de  $x_M(t)$  sachant que les frottements sont faibles. (On ne déterminera pas les constantes d'intégration).

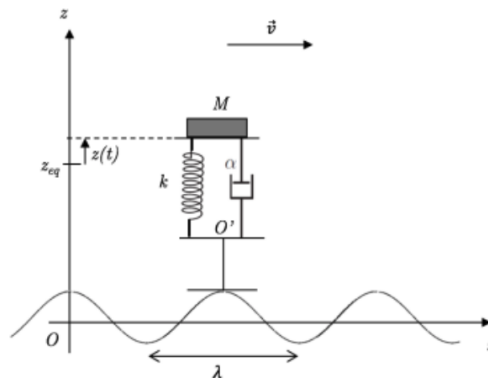
**Exercice 9 : Ski de bosse**



Dans cet exercice, nous nous intéressons à un skieur qui dévale une piste de

bosses. Nous nous demandons s'il existe une vitesse à choisir pour subir le moins possible les oscillations de la piste.

On modélise le skieur et ses skis le plus simplement possible : une masse  $m$  pour le torse, en contact avec le sol via un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ , et un amortisseur de coefficient d'amortissement  $\alpha$  pour l'ensemble {jambes+skis}, en contact ponctuel avec la neige (voir schéma ci-dessous).



Le skieur se déplace à une vitesse  $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ , sur une piste dont le profil impose à  $O'$  de suivre une côte  $z_{O'} = L + h(t)$  avec  $h(t) = E_m \cos\left(2\pi \frac{x(t)}{\lambda}\right)$ , \* étant l'abscisse du point  $O'$ .

On note  $z_{eq}$  l'altitude du skieur lorsqu'il est à l'équilibre (skieur immobile au repos, pas de bosses donc  $h(t) = 0$ ).

Le mouvement vertical du skieur est repéré par la côte  $z(t)$ , qui est la différence la position du skieur et sa position  $z_{eq}$  lorsqu'il est à l'équilibre.

Enfin, la force exercée par l'amortisseur s'écrit :  $\vec{F} = -(\dot{z}(t) - \dot{z}_{O'}(t)) \vec{e}_z$ .

- ① Donner l'expression de  $x(t)$  en supposant que  $O'$  se trouve à la verticale de  $O$  à l'instant initial. En déduire l'expression de la pulsation  $\omega$  du forçage du système en fonction de  $\lambda$  et de  $v$ . On conservera la notation  $\omega$  dans ce qui suit.
- ② Faire un bilan des forces s'exerçant sur la masse, et exprimer chaque force en fonction de  $\vec{e}_z$  et des paramètres du problème (dont  $z(t)$  et sa dérivée,  $L$ ,  $h(t)$  et sa dérivée,  $k$ ,  $l_0$ ,  $\alpha$ ,  $z_{eq}$ ).
- ③ On s'intéresse à la position d'équilibre. Montrer que  $z_{eq}$  vérifie :

$$-k(z_{eq} - L - l_0) - mg = 0$$

④ Déterminer l'équation différentielle satisfaite par  $z(t)$ . Montrer quelle peut se mettre sous la forme suivante :

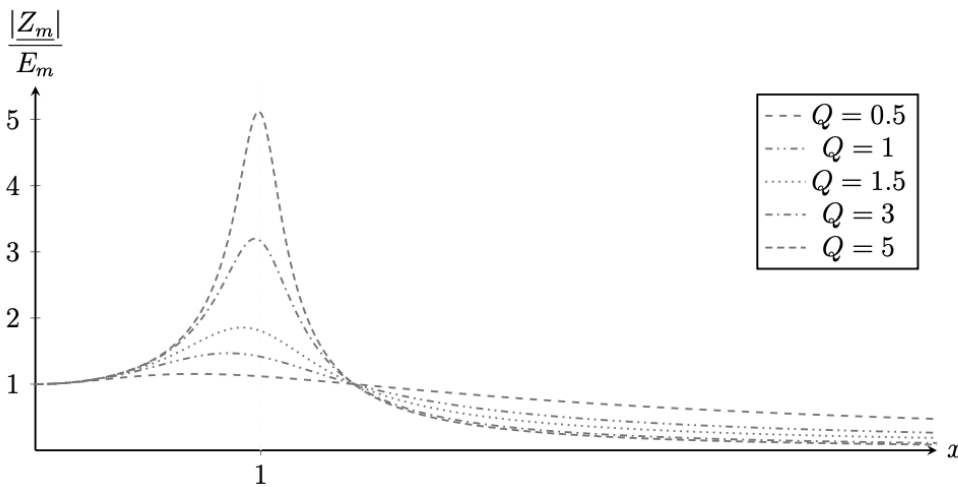
$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{\omega_0}{Q}\dot{h} + \omega_0^2 h(t)$$

où l'on exprimera  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction des paramètres du système.

⑤ On notera  $Z_m$  l'amplitude complexe associée à  $z(t)$ . Donner la forme du signal complexe associé à  $z(t)$ . Déterminer l'expression de l'amplitude complexe  $Z_m$ . Montrer ensuite que l'amplitude  $Z_m$  des oscillations verticales du skieur est donnée par la relation :

$$Z_m = \frac{\sqrt{1+x^2/Q^2}}{\sqrt{(1-x^2)^2+x^2/Q^2}} E_m \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

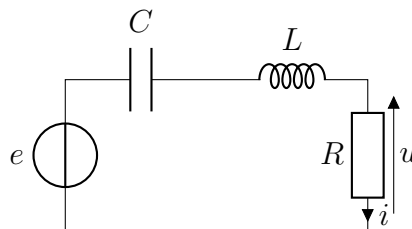
⑥ Le graphique ci-dessous montre l'évolution du rapport  $Z_m/E_m$  en fonction de  $x$  pour plusieurs valeurs de  $Q$ . Quelles sont alors les solutions pour réussir à descendre la piste sans trop de peine ?



**Exercice 10 : Résonance en courant d'un circuit RLC**

Considérons un circuit RLC série aux bornes duquel un générateur impose un forçage sinusoïdal :  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ .

On se place en régime permanent, et nous utiliserons la représentation complexe.



① Déterminer l'amplitude complexe du courant dans ce circuit :

$$\underline{I}_0 = \frac{E_0/R}{1 + jQ(x - 1/x)}$$

où  $x = \omega/\omega_0$ . Vous exprimerez  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

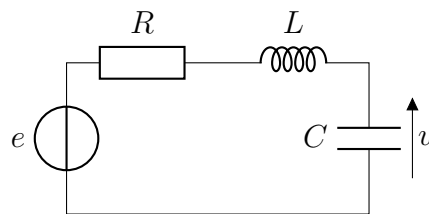
- ② Montrer que ce circuit admet une résonance en intensité quelle que soit la valeur de  $Q$ . Déterminer  $\omega_r$  la pulsation de résonance en fonction de  $\omega_0$ .
- ③ Quelle est l'intensité maximale  $I_{\max}$  ?
- ④ Soit  $\omega_1$  et  $\omega_2 > \omega_1$  les pulsations telles que  $I(\omega) = I_{\max}/\sqrt{2}$ . Déterminer  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .
- ⑤ Tracer l'allure de  $I$  en fonction de la pulsation d'excitation  $\omega$ .
- ⑥ En déduire la largeur de la bande passante  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ . Montrer alors que  $\Delta\omega = \omega_0/Q$ .
- ⑦ Tracer alors  $U$  l'amplitude de la tension aux bornes de  $R$  en fonction de  $\omega$  pour différentes valeurs de  $Q$ . Conclure sur l'effet du facteur de qualité.

**Exercice 11 : Résonance en tension d'un circuit RLC**



Considérons un circuit RLC série aux bornes duquel un générateur impose un forçage sinusoïdal :  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ .

On se place en régime permanent, et nous utiliserons la représentation complexe.



- ① Exprimer l'amplitude complexe  $\underline{u}$  de la tension aux bornes du condensateur en fonction de  $\underline{e}$  et des différents dipôles.
- ② Identifier la pulsation propre  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$  tels que

$$\underline{u} = \frac{\underline{e}}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$$

- ③ Identifier la fonction  $f$  telle que :

$$|\underline{U}| = \frac{E_0}{\sqrt{f(X)}} \quad \text{avec} \quad X = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

- ④ À quelle condition sur  $f$  observe-t-on un phénomène de résonance ? Déterminer une condition sur  $Q$  pour que la résonance soit effectivement observable.
- ⑤ Déterminer la pulsation de résonance  $\omega_r$ .
- ⑥ Montre que le maximum de tension est  $U_{\max} = \frac{QE_0}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}}$ . Que devient cette expression dans le cas où  $Q \gg 1$ . Justifier l'autre nom donné au facteur de qualité : facteur de surtension.
- ⑦ Soit  $\omega_1$  et  $\omega_2 > \omega_1$  les pulsations telles que  $U(\omega_i) = U_{\max}/\sqrt{2}$ . Déterminer  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Les pulsations sont-elles symétriques par rapport à  $\omega_r$  ?
- ⑧ La bande passante est définie par l'intervalle  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ . Déterminer l'expression de  $\Delta\omega$  en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .
- ⑨ Montrer que dans le cas où  $Q \gg 1$ ,  $Q = \frac{\omega}{\Delta\omega}$ .