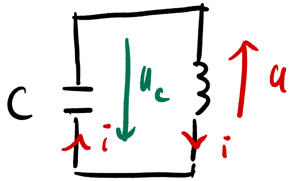
DS 4. 4 h.

Exercice 1.

1 • schéma à $t>0$



1

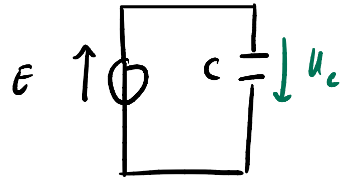
- $u = L\,di/dt$ (1) 1
- $i = C\dfrac{du_c}{dt}$ (2) 1
- $u_c + u = 0$ (3) 1

$$(1) \Leftrightarrow u = L\frac{di}{dt} \underset{(2)}{=} LC\frac{d^2u_c}{dt^2} \underset{(3)}{=} -LC\frac{d^2u}{dt^2}$$ 2

d'où $\boxed{\dfrac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2\,u = 0}$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ 1

Il s'agit d'une équa-diff d'ordre 2, donc qui nécessite 2 conditions pour être résolue. 1

2 schéma à $t=0^-$



1

à $t=0^-$ L.M : $u_c + E = 0 \Leftrightarrow u_c(0^-) = -E$ 1

or $u_c(0^+) = u_c(0^-)$ 1

continuité de la tension aux bornes d'un condensateur.

donc $u_c(0^-) = -E$

or d'après la question 1, $u(t>0) = -u_c(t>0)$

donc $\boxed{u(0^+) = E}$ 1

3 à $t=0^-$, la branche de droite est ouverte

donc $i(0^-) = 0$ 1

or $i(0^+) = i(0^-)$ 1

continuité du courant traversant une bobine

donc $\boxed{i(0^+) = 0}$ 1

4 Je reconnais une équat° différentielle harmonique dont la solut° est

$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ 1

$i = -C\frac{du}{dt} = CA\omega_0 \sin(\omega_0 t) - CB\omega_0 \cos(\omega_0 t)$ 1

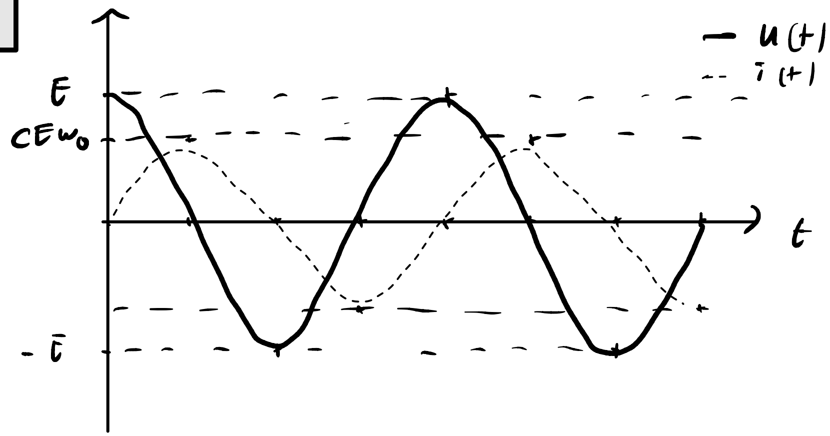
↑
Q 1

$u(0) = E = A$ 1

$i(0) = -CB\omega_0 = 0$ 1

d'où $\boxed{\begin{array}{l} u(t) = E\cos(\omega_0 t) \\ i(t) = CE\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{array}}$ 1

5



2

Exercice 2

6 soit w la fraction volumique d'alcool.

$w = 35\% = \frac{V_{et}}{V_{sol}}$ 1

on $\left[C = \frac{n_{et}}{V_{sol}} = \frac{m_{et}}{M_{et} V_{sol}} = \frac{\rho_{et} V_{et}}{M_{et} V_{sol}} = \boxed{\frac{\rho_{et}}{M_{et}} w} \right.$ 2

A.N. $C = \frac{0{,}78\ g.mL^{-1}}{(2\times 12 + 6 + 16)\ g.mol^{-1}} \times 0{,}35$

$C = 5{,}9 \times 10^{-3}\ mol.mL^{-1}$

$C = 5{,}9\ mol.L^{-1}$ 1

7 $v = -\frac{d[CH_3CH_2OH]}{dt} = k[CH_3CH_2OH]$ $\color{red}{1}$ 1 1

↑ def ↑ e° d'ordre ↑ ordre 1

Je reconnais une équat° différentielle d'ordre 1, dont la solut° est : $[CH_3CH_2OH](t) = [CH_3CH_2OH]_0 \exp(-kt)$ $\color{red}{(1)}$ 1

$\Leftrightarrow \ln[CH_3CH_2OH] = \ln[CH_3CH_2OH]_0 - kt$

Je trace à la calculatrice la courbe 1

$\ln[CH_3CH_2OH] = f(t)$

J'obtiens une droite de pente $a = -0,17$ et d'ordonnée à l'origine $b = 1,77$. 1

La réaction est donc d'ordre 1. 1

8 $k = -a = 0,17 \text{ min}^{-1}$ 1

9 Le temps de demi réaction $t_{1/2}$ correspond à l'instant où la concentration initiale est divisée par 2. 1

à $t = t_{1/2}$ $[CH_3CH_2OH](t_{1/2}) = \frac{[CH_3CH_2OH]_0}{2}$

d'où (1) <=> $\frac{[CH_3\cancel{CH_2OH}]_0}{2} = [CH_3\cancel{CH_2OH}]_0 \exp(kt_{1/2})$

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k}}$$ 1

A.N. $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{0,17} = 4,1 \text{ min}$ 1

10 L'homme a consommé $V_c = 15$ cL d'alcool.

soit $n = C_{et} \times V_c = \frac{m_{et}}{M_{et}}$

l'homme pèse $m_h = 51$ kg (étonnant comme masse ?)

soit un taux d'alcool de $\alpha = \frac{m_{et}}{m_h} = \frac{C_{et} \times V_c \times M_{et}}{m_h}$

A.N. $\alpha = \frac{5,9 \times 0,15 \times (2\times12 + 6 + 16)}{51}$

cf Q6

$\alpha = 0,80$ g/kg ce qui correspond aux données du graphique fourni. 1

Nous lisons la courbe avec les points noirs,

$t_m = 1,2$ h soit 1 h 15 min. 1

à l'instant t_m son alcoolémie vaut 1,0 g/L 1

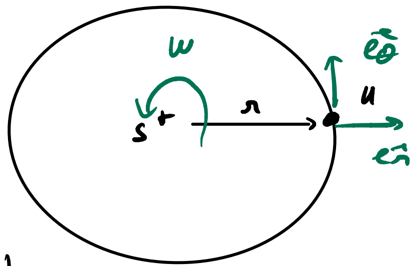
deux fois supérieure à la limite pour conduire.

11 Il faudra attendre presque 5 h après avoir pris le verre pour avoir le droit de conduire 1

P 3/12

Exercice 3 Uranus.

12 schéma : 1



réf : héliocentrique, 1
supposé galiléen

coord : polaires (r, θ) 1

système : u (uranus) de masse m 1

forces : gravitation $\vec{F_G} = -G\dfrac{m M_S}{r^2}\vec{e_r}$ (soleil) 1

J'applique le principe fondamental de la dynamique 1
(PFD) :

$$m\vec{a} = \vec{F_G}$$ 1

il nous faut l'accélération en coordonnées polaires :

$$\vec{SU} = r\vec{e_r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{SU}}{dt} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

car $r = c^{ste}$: circulaire $\Rightarrow \dot{r} = 0$

d'où $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r}$ 1

d'où

(1) $-r\dot{\theta}^2 = -G\dfrac{M_S}{r^2}$ p/r $\vec{e_r}$ 1

(2) $r\ddot{\theta} = 0$ p/r $\vec{e_\theta}$

L'équation (2) nous donne $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = c^{ste}$

or $\vec{v} = v\vec{e_\theta} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$, la norme de la vitesse est constante, donc le mouvement est uniforme 1.

13 D'après l'équation (1)

$$r^3\dot{\theta}^2 = GM_S$$ 1

or la période de révolution T est $v = \dfrac{2\pi r}{T}$

or $v = r\dot{\theta}$ d'où $T = \dfrac{2\pi}{\dot{\theta}}$ $\left(T = \dfrac{2\pi}{w}\ !\right)$

dans l'équation précédente :

$$r^3\frac{4\pi^2}{T^2} = GM_S \Leftrightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_S}}}$$ 1

P 4 / 12

14 Pour la Terre $T_t = 2\pi\sqrt{\dfrac{r_{ST}^3}{m_S G}}$ 1

période terrestre

distance Terre - soleil

d'où $\dfrac{T_t^2}{r_{ST}^3} = \dfrac{4\pi^2}{m_S G} = \dfrac{T^2}{r^3}$

$\Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\dfrac{T^2}{T_t^2}}\; r_{st}$

1 ua

et $T = 84\, T_t$

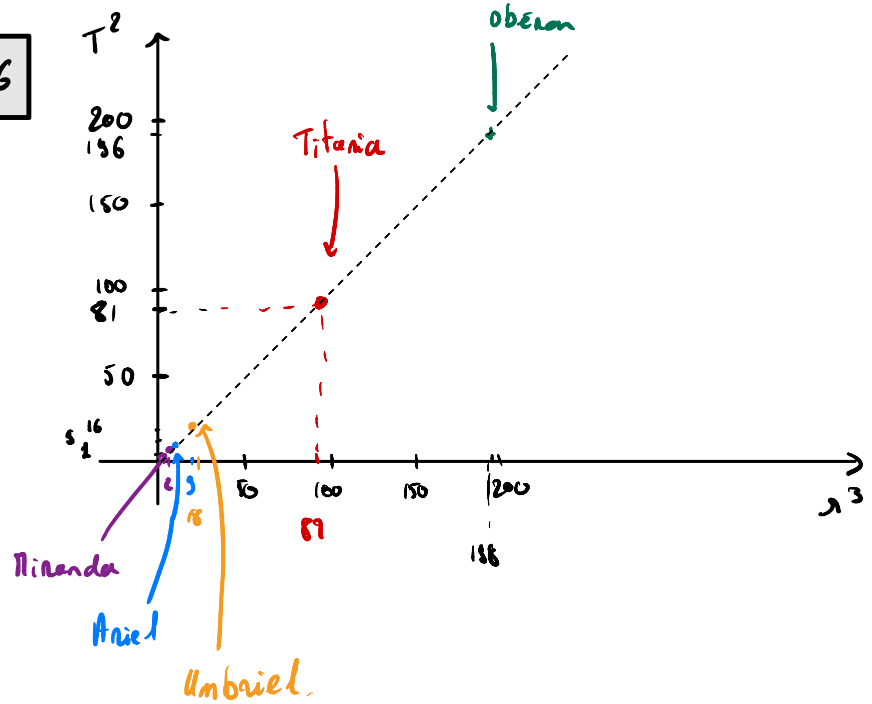
d'où $r = \sqrt[3]{84^2}\; r_{st}$ 1

A.N. $\boxed{r = 19 \text{ ua}}$ 1

15 Même question que les Q12 et 13, mais avec un satellite comme système et Uranus comme astre attracteur :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{G\, m_u}}}$$ 2

16 2



17 $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G\, m_u}\, r^3$

Je fais la regression linéaire à la calculatrice. 1

1 jours terrestre = 24 h × 3 600 s

la pente est égale $a = 7{,}4\times10^{-15}$ 1

$m_u = \dfrac{4\pi^2}{G\, a} = 8{,}0\times10^{25}$ kg 1

P5/12

Exercice 4

18 dans le repère polaire $\vec{OM} = r\vec{u}_r$

et $\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{vmatrix}_{pol}$ 1

d'où $\boxed{\vec{v} = \begin{vmatrix} -r_0\omega\sin(\omega t) \\ r_0\cos(\omega t)\,\omega \end{vmatrix}_{pol} = r_0\omega \begin{vmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{vmatrix}_{pol}}$ 2

19 $v = \|\vec{v}\| = r_0\omega\sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)}$

$\boxed{v = r_0\omega}$ 1

La norme de v est constante, donc le mouvement est uniforme 1

20 $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = r_0\omega \dfrac{d}{dt}\left(-\sin(\omega t)\,\vec{u}_r + \cos(\omega t)\,\vec{u}_\theta\right)$ 1

$= r_0\omega\left\{-\omega\cos(\omega t)\,\vec{u}_r - \sin(\omega t)\,\omega\,\vec{u}_\theta - \omega\sin(\omega t)\,\vec{u}_\theta - \omega\cos(\omega t)\,\vec{u}_r\right\}$

$\boxed{\vec{a} = -2r_0\omega^2 \begin{vmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{vmatrix}_{pol}}$ 2

21 $\boxed{a = \|\vec{a}\| = 2r_0\omega^2}$ 1

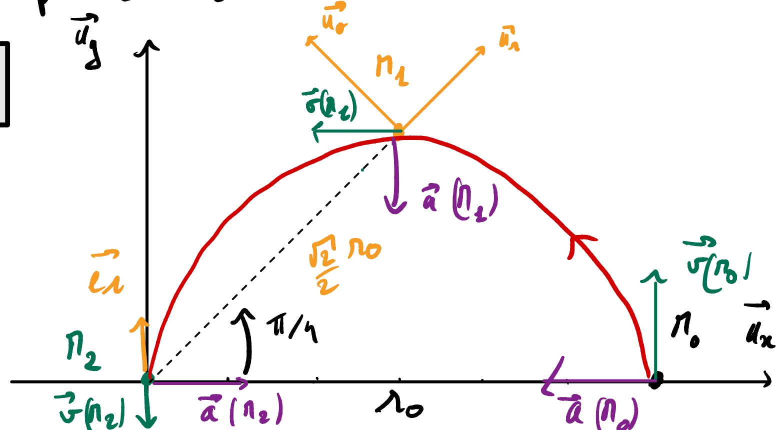
22 $\vec{v}\cdot\vec{a} = -2r_0^2\omega^3\left(\overbrace{-\sin(\omega t)\cos(\omega t) + \cos(\omega t)\sin(\omega t)}^{0}\right)$ 1

$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{a} = 0}$

Le vecteur vitesse et accélération sont orthogonaux. 1

Comme le mouvement est uniforme, l'accélération ne doit pas entraîner ou freiner le mouvement, donc l'accélération doit être orthogonale à la vitesse ou alors nulle. Le résultat précédent était prévisible. 1.

23



1 M, M_1
1 $\vec{v}$
1 $\vec{a}$

P6/12

vitesse :

en M_0 : $\vec{v}(M_0) = r_0 \omega \vec{e_\theta}$

en M_1 : $\vec{v}(M_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} r_0 \omega \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}_{pol}$

en M_2 : $\vec{v}(M_2) = -r_0 \omega \vec{e_r}$

accélération : $\perp$ à la vitesse

et dirigée vers le centre

Exercice 5. Chute d'une goutte.

$\boxed{24}$

• poids de la goutte $\vec{P} = m\vec{g}$ 1

• poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -\rho_a V \vec{g}$ 1

$\boxed{25}$

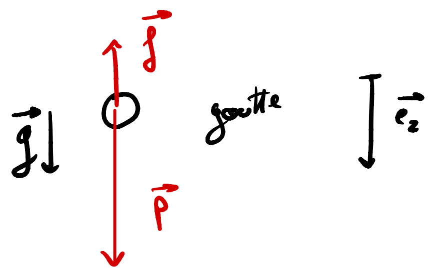
$$\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{\Pi}\|} = \frac{\rho_l \cancel{V} \cancel{g}}{\rho_a \cancel{V} \cancel{g}} = \frac{\rho_l}{\rho_a}$$ 1

or d'après les données $\rho_a \ll \rho_l$

donc $\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{\Pi}\|} \gg 1$ ainsi $\boxed{\|\vec{P}\| \gg \|\vec{\Pi}\|}$

La poussée d'Archimède est négligeable devant le poids. 1

$\boxed{26}$ schéma



1

réf : terrestre, galiléen 1

système : goutte de masse m 1

coordonnées : 1D, $\vec{e_z}$ vers le bas 1

Bilan des forces extérieures : • poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e_z}$ 1

• Archimède négligée

• frottements fluides : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$

PFD :

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \alpha\vec{v}$$ 1

or $\vec{v} = v\vec{e_z}$ $(= \dot{z}\vec{e_z})$

d'où en projetant le PFD sur l'axe $\vec{e_z}$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v = g} \quad \text{(ED)}$$ 2

27 Plus la vitesse de chute va augmenter plus la force de frottement fluide va augmenter. Ceci jusqu'à ce que la force de frottement compense le poids de la goutte. À partir de là les forces se compensent donc la goutte n'accélère plus, elle a atteint sa vitesse limite v_{lim}. 2

on injecte $v = v_{lim} = c^{ste}$ dans l'(ED)

$\frac{\alpha}{m}v_{lim} = g$ d'où $\boxed{v_{lim} = \frac{mg}{\alpha}}$ 1

28 L'(ED) est une équation différentielle d'ordre 1 avec second membre :

solut° homogène $v_h = \lambda\exp\left(-\frac{m}{\alpha}t\right)$

solut° particulière $v_p = v_{lim}$ (voir Q 27)

donc la solution globale est :

$$v = \lambda\exp\left(-\frac{m}{\alpha}t\right) + v_{lim}$$ 1

λ est une constante d'intégration.

à $t=0$, $v(t=0)=0$, la goutte est lâchée sans vitesse initiale. 1

$$0 = \lambda + v_{lim} \Leftrightarrow \lambda = -v_{lim}$$

Au final $\boxed{v(t) = v_{lim}\left(1 - \exp\left(-\frac{m}{\alpha}t\right)\right)}$ 2

On reconnait l'expression fournie en identifiant $\boxed{\tau = \alpha/m}$ 1

P8/12

29 L'accélération est positive jusqu'à s'annuler lorsque la vitesse devient constante. L'accélération diminue au cours du temps 1

30 $v = v_{lim}\left\{1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)\right\}$

$\underset{\frac{t}{\tau} \ll 1}{v \simeq} v_{lim}\left\{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{m}t\right)\right\}$ 1

$\underset{\frac{t}{\tau} \ll 1}{v \simeq} v_{lim}\frac{\alpha}{m}t = \frac{\cancel{m}g\cancel{\alpha}}{\cancel{\alpha}\cancel{m}}t$

$\boxed{v \simeq gt}$ si $t \ll \tau$

Cette vitesse correspond à un cas sans frottement fluide. Au début, la vitesse est faible, la force de frottement est négligeable devant le poids. 1

31 en régime permanent ($t \to +\infty$) la vitesse tends vers une constante donc l'accélération est nulle 1

Le mouvement de la goutte est alors rectiligne uniforme. 1 +1

32 v_{lim} correspond aux instants où la vitesse est constante sur la courbe. Par lecture graphique : $v_{lim} \simeq 31\ m.s^{-1}$ 1.

Pour déterminer τ, on cherche l'instant pour lequel la courbe a atteint 67% de sa valeur finale : $\frac{67}{100} \times 31 \simeq 20\ m.s^{-1}$, ce qui nous donne $\tau = 4\ s$ 1

33 Nous prenons p comme indice pour la petite goutte de Rayon $r_p = 20\ \mu m$ et g pour la grosse goutte $r_g = 60\ \mu m$

$$\frac{v_{lim\,p}}{v_{lim\,g}} = \frac{m_p \cancel{g}/\alpha_p}{m_g \cancel{g}/\alpha_g} = \frac{\cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi} r_p^3 \cancel{\rho} \alpha_g}{\cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi} r_g^3 \cancel{\rho} \alpha_p}$$

or $\alpha_g = k r_g$ et $\alpha_p = k r_p$

d'où $$\frac{v_{lim\,p}}{v_{lim\,g}} = \frac{r_p^{\cancel{3}2}\ \cancel{k}\ \cancel{r_g}}{r_g^{\cancel{3}2}\ \cancel{k}\ \cancel{r_p}} = \frac{r_p^2}{r_g^2} \simeq 0,1$$ 1

La vitesse de la petite goutte est 10 fois

P 9/ 12

moins importante que celle de la grosse.

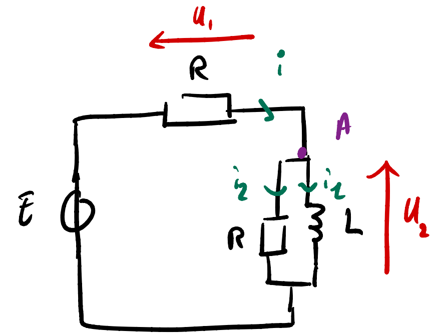
Exercice 6 : RL à 2 mailles

Q34 i_1 est continue car le courant traversant une bobine est continu. 2

Q35 $i_1(0^-) = 0$ car il n'y a aucun courant 1

or $\underset{\underset{Q34}{\uparrow}}{i_1(0^+) = i_1(0^-)}$ donc $i_1(0^+) = 0$. 1

schéma à $t = 0^+$:



Loi des noeuds en A : $i = i_1 + i_2 \underset{\text{à } t=0^+}{\Rightarrow} i = i_2$

Loi des mailles $E = u_1 + u_2 = Ri + Ri_2$

$\underset{\text{à } t=0^+}{E = 2Ri(0^+)}$ ($i = i_2$ à $t=0^+$)

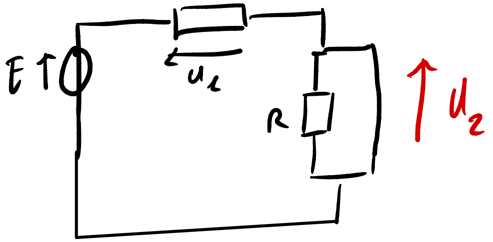
d'où $i(0^+) = \dfrac{E}{2R}$ or $u_1 = Ri$

donc $\boxed{u_1(0^+) = \dfrac{E}{2}}$ 3 + 1 méthode

idem $\boxed{u_2(0^+) = \dfrac{E}{2}}$

36 En régime permanent la bobine se comporte comme un fil. 1

37 schéma en $t \to +\infty$

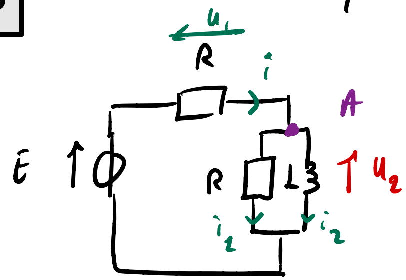


1

$u_2 = 0$ car il s'agit de la tension aux bornes d'un fil 1

LM : $u_1 = E$. 1

38 schéma à t quelconque :



LM : $E = u_1 + u_2$

$E = Ri + u_2$

LN en A $E = R(i_1 + i_2) + u_2$ (1) 1

$\begin{cases} \text{Loi d'Ohm} & u_2 = Ri_1 \Rightarrow i_1 = \frac{u_2}{R} \\ \text{loi bobine} & u_2 = L\frac{di_2}{dt} \quad (2) \end{cases}$ 1

dans (1) : $E = \cancel{R}\frac{\cancel{u_2}}{\cancel{R}} + Ri_2 + 2u_2$

$\frac{d}{dt}$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = R\frac{di_2}{dt} + 2\frac{du_2}{dt}$$

(2)

$$0 = \frac{R}{L}u_2 + 2\frac{du_2}{dt}$$

d'où $\frac{du_2}{dt} + \frac{R}{2L}u_2 = 0$

on pose $\tau = \frac{2L}{R}$ et ainsi $\boxed{\frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{\tau} = 0}$

39 Je reconnais une équat° diff d'ordre 1 sans second membre, dont la solut° est

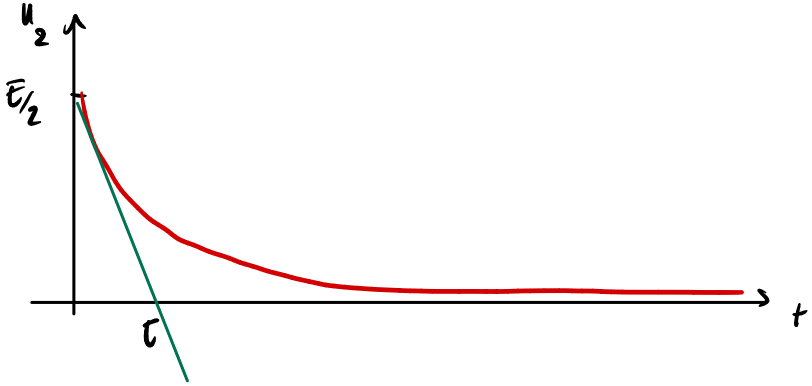
$$u_2(t) = \lambda \exp(-t/\tau)$$

$u_2(0) = \frac{E}{2} = \lambda$

d'où $\boxed{u_2(t) = \frac{E}{2}\exp(-t/\tau)}$ 2

P11/12

40



41

à $t = t_{10}$, $u_2(t_{10}) = \frac{u_2(0)}{10} = \frac{\cancel{E}}{\cancel{20}\ 10} = \frac{\cancel{E}}{\cancel{2}} \exp\left(-\frac{t_{10}}{\tau}\right)$

$\ln\left(\frac{1}{10}\right) = -t_{10}/\tau$

d'où $\boxed{t_{10} = \tau \ln 10 = \frac{2L}{R} \ln 10}$ 1

42

$$L = \frac{R\, t_{10}}{2 \ln(10)}$$

A.N. $L = \frac{1 \times 10^3 \times 3}{2 \ln(10)} = 650 \text{ H}$.

↳ valeur aberrante !