M4 | Mécanique

Oscillateurs mécaniques

Prérequis

Notions mathématiques : vecteur, projection de vecteur	Lycée et prépa
Notion mathématiques : dérivée d'une fonction	Lycée, prépa et FO7
Notion mathématiques : dérivée d'une fonction composée	Math CPGE et FO7
Étude du mouvement d'un point matériel	chapitre M1, M2
Forces usuelles	Chapitre M2

Plan

Savoirs

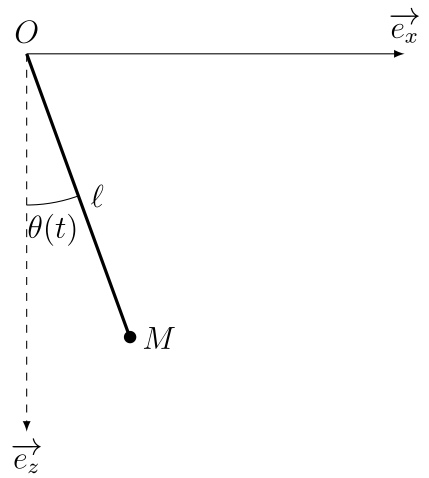
Reconnaitre une équation différentielle harmonique (non amortie)	*II*
Connaitre la forme canonique d'une équation différentielle harmonique	*II*
Connaitre la solution d'une équation différentielle harmonique	*II*
Reconnaitre une équation différentielle harmonique amortie	*III*
Connaitre la forme canonique d'une équation différentielle harmonique amortie	*III*
Connaitre la solution d'une équation différentielle harmonique amortie	*II*

Savoir-Faire

Établir l'équation différentielle du mouvement	*II et III*
Déterminer la solution d'une équation différentielle du second degré	*II et III*

Application 1 : Pendule pesant simple (sans frottements)

Énoncé



Nous étudions un pendule pensant simple de longueur fixe ℓ, composé d'une tige de masse négligeable au bout de laquelle oscille une masse m supposée ponctuelle repérée par le point M.
À l'instant initial, nous lâchons la masse d'un angle initial θ_0 sans vitesse initiale.

1 Déterminer l'équation différentielle portant sur l'angle θ.

2 Dans l'approximation des petits angles, linéariser cette équation différentielle. Donner l'expression de la période propre du pendule.

3 En déduire la position angulaire du pendule au cours du temps. La tracer.

Solution

1 Penser à citer le cadre de l'étude : système, référentiel, BAME, schéma, base de projection. Citer le PDF. Calculer l'accélération dans la base polaire. Projeter les forces dans la base polaire.
La projection sur $\overrightarrow{e_\theta}$donne :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

2 Approximation des petits angles : $\sin(\theta) \simeq \theta$ (pas encore vu en math)

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Par identification avec la forme canonique :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

d'où

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

3 Je reconnais une équation différentielle harmonique non amortie dont la solution (homogène) est :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Remarque : pourquoi ne pas utiliser la forme $\theta(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$?
À l'instant initial : $\theta(t=0) = \theta_0$ d'où $A = \theta_0$ et le pendule est lâché sans vitesse initiale :

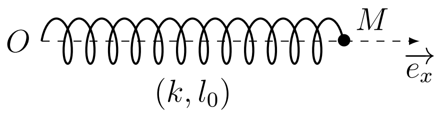
$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} &= l\dot{\theta}(t)\overrightarrow{e_\theta} = v\overrightarrow{e_\theta} \\ v(t) &= l\dot{\theta}(t) \\ v(t=0) = 0 &= \dot{\theta}(t=0) \\ \text{en dérivant la solution} \quad B &= 0 \end{aligned}$$

Au final :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

Application 2 : Vitesse dans la base polaire

Énoncé Nous considérons un ressort horizontal de raideur k et de longueur à vide l_0 dont nous négligeons la masse. Ce ressort en attaché au bâti d'un côté et une masselotte de masse m est attaché de l'autre côté. Cette masselotte est libre de se déplacer selon l'axe (Ox).
À l'instant initial, le ressort est lâché d'une position x_0 sans vitesse initiale.



1 Établir l'équation différentielle sur la position horizontale x de la masse m repérée par le point M.
2 Introduire une pulsation propre. En déduire la période propre T_0 de cet oscillateur.
3 Résoudre l'équation différentielle. Tracer $x(t)$.

Solution
1 Il faut bien définir le cadre de l'étude : système, référentiel, bilan des actions mécaniques, faire un schéma. Appliquer le PFD. Projeter l'accélération et les forces dans la base cartésienne.
Finalement, nous obtenons l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0$$

2 Par identification avec la forme canonique, nous posons $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Donc la période propre de cet oscillateur est $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.
3 Il s'agit d'une équation différentielle harmonique avec second membre. La solution homogène est :

$$x_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$
$$(A, B) \in \mathbb{R}^2$$

La solution particulière est une constante car le second membre en constant. En injectant dans l'équation différentielle, nous trouvons $x_p = l_0$
Finalement :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + l_0$$

⚠ Il faut déterminer la solution globale avant de chercher à déterminer les conditions initiales.
Conditions initiales : $x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = 0$. Nous pouvons en déduire que $A + l_0 = x_0$ et $B = 0$.

$$x(t) = (x_0 - l_0)\cos(\omega_0 t) + l_0$$

Tracer la solution : oscillations d'amplitude $x_0 - l_0$ autour de l_0 à la période T_0.

Application 3 : Pendule pesant simple avec frottement (fluide)

Énoncé Nous reprenons l'étude de l'application 1. Cette fois ci, nous ne négligeons plus les frottements induit par l'air sur le pendule :

$$\vec{f} = -\lambda \vec{v}$$

1 Déterminer l'équation différentielle sur la position angulaire θ du pendule.
2 Linéariser cette équation dans l'approximation des petits angles. En déduire la pulsation propre ainsi que la période propre de cet oscillateur.
3 À quelle condition sur λ obtient-on des oscillations ? À quelle condition observe-t-on au contraire un régime critique ou un régime apériodique ?
4 Résoudre l'équation différentielle linéariser dans l'approximation d'un oscillateur faiblement amorti : $\lambda/m \ll \omega_0$.

Solution
1 Définir le cadre de l'étude : système, référentiel, BAME, schéma. Énoncer le PFD. Projeter les forces et l'accélération dans la base polaire. Nous en déduisons l'équation différentielle (en projection sur $\vec{e_\theta}$) :

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

2

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

3
(EC) : équation caractéristique

$$r^2 + \frac{\lambda}{m}r + \omega_0^2 = 0$$

Il y des oscillations si $\Delta < 0$, c'est-à-dire si $\lambda < 2m\sqrt{\frac{g}{l}}$.
Le régime apériodique est atteint si $\lambda > 2m\sqrt{\frac{g}{l}}$. Et le régime critique en cas d'égalité : $\lambda = 2m\sqrt{\frac{g}{l}}$.
4 Les racines de (EC) sont :

$$r_\pm = \frac{-\lambda}{2m} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{m^2}}$$

$$r_\pm \simeq \frac{-\lambda}{2m} \pm i\omega_0$$

Donc les solutions (homogènes) de l'équation différentielle sont :

$$\theta(t) = (A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t))\,\mathrm{e}^{\frac{-\lambda t}{2m}}$$

Les conditions initales permettent de déterminer A et B :

$$A = \theta_0$$
$$B = \frac{\lambda\theta_0}{2m\omega_0}$$

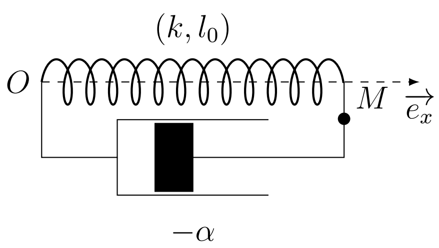
Remarque, il est possible de négliger le terme B par rapport au terme A car $B = \frac{\theta_0}{2Q}$ donc $B \ll A$.
Finalement :

$$\theta(t) = \theta_0\left(\cos(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{\lambda}{2m\omega_0}\sin(\omega_0 t)}_{\simeq 0}\right)\mathrm{e}^{\frac{-\lambda t}{2m}}$$

Tracer la solution : oscillateur amorti (faiblement donc beaucoup d'oscillations > 10). Amortissement exponentiel : représenter le temps caractéristique d'amortissment $\tau = 2m/\lambda$. Représenter la pseudo-période d'oscillation, ici $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Application 4 : Amortisseur

Énoncé Nous étudions un amortisseur : association en parallèle d'un ressort avec un amortisseeur :



L'amortisseur exerce une force qui s'oppose à la vitesse de la masse : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$.
À l'instant initial, nous déplaçons la masse M depuis sa position d'équilibre $x = l_0$ vers une position $x(t = 0) = x_0 = l_0 + u_0$. u_0 représente le déplacement initial de la masse.
1 Déterminer l'équation différentielle sur la position horizontale x du point M. Introduire la pulsation propre ω_0.
2 En introduisant le déplacement instantané $u(t) = x(t) - l_0$, déterminer l'équation différentielle sur u.
3 La résoudre en supposant un fort amortissement : $\alpha/2m > \omega_0$.

Solution
1 Même méthode que les applications précédentes.

$$\ddot{x} + \alpha/m\dot{x} + k/mx = k/ml_0$$

2

$$\ddot{u} + \alpha/m\dot{u} + k/mu = 0$$

Nous nous ramenons à une équation différentielle sans second membre (donc homogène). L'étude est simplifiée.
3 Fort amortissement, donc régime apériodique. u(t) est de la forme :

$$u(t) = A\,\mathrm{e}^{r_1 t} + B\,\mathrm{e}^{r_2 t}$$

où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique : $r^2 + \alpha/mr + \omega_0^2 = 0$
En introduisant les conditions initiales :

$$u(t) = \frac{u_0}{r_2 - r_1}\left(r_2\,\mathrm{e}^{r_1 t} - r_1\,\mathrm{e}^{r_2 t}\right)$$

d'où x(t) :

$$x(t) = \frac{u_0}{r_2 - r_1}\left(r_2\,\mathrm{e}^{r_1 t} - r_1\,\mathrm{e}^{r_2 t}\right) + l_0$$

Tracer la solution.