M5 | Mécanique

Théorème énergétiques

Prérequis

Notions mathématiques : vecteur, produit scalaire	CPGE
Notion mathématiques : différentielle et dérivées, dérivées de fonctions composées	CPGE
Étude du mouvement d'un point matériel	chapitre M1 à M4
Énergie potentielle, cinétique et mécanique	collège et lycée
Puissance	chapitre E1, électrocinétique

Plan

Savoirs

Qu'est-ce que l'énergie, son unité.	I
Relation entre l'énergie et la puissance. Unité de la puissance.	I
Puissance d'une force. Nature motrice et résistive de la force	I
Travail élémentaire d'une force, travail le long d'une trajectoire.	I
Définition de l'énergie cinétique	II
Théorème de l'énergie cinétique instantané ou théorème de la puissance cinétique	II
Théorème de l'énergie cinétique intégral	II
Définition d'une force conservative. Définition énergie potentielle.	III
Énergie potentielle à connaitre : pesanteur, élastique (ressort), gravitation	III

Définition de l'énergie mécanique. Théorème de la puissance mécanique (ou théorème de l'énergie mécanique instantané). Théorème de l'énergie mécanique (intégral) — III

Savoir-Faire

- Déterminer le travail ou la puissance d'une force le long d'un chemin — I
- Déterminer le travail élémentaire d'une force — I
- Décrire et interpréter la nature motrice, résistive ou d'une force ne travaillant pas — I
- Utiliser le théorème de la puissance cinétique pour déterminer une équation différentielle du mouvement — II
- Utiliser le théorème l'énergie cinétique (intégral) pour déterminer la vitesse en un point — II
- Pour un mouvement conservatif, déterminer la valeur de l'énergie mécanique à partir des conditions initales — III
- Utiliser le théorème de la puissance mécanique pour déterminer une équation différentielle du mouvement — III
- Utiliser le théorème l'énergie mécanique (intégral) pour déterminer la vitesse en un point — III

Application 1 : Unité de l'énergie

Énoncé

1. Donner l'unité de l'énergie.
2. Exprimer là en Farad et volt.
3. De même en Henry et Ampère.

Solution

1. J, joules
2. $[E] = F.V^2$
3. $[E] = H.A^2$

Application 2 : Ascension du Tourmalet

Énoncé T. Pinot, pèse $m = 63\,\text{kg}$, détient le record de l'ascension du Tourmalet (depuis Luz-St-Sauveur) en vélo, en 50'41s pour une distance de 18,64 km et un dénivelé de $1535\,\text{m}$.

1. Calculer le travail W du poids de T. Pinot lors de cette ascension.
2. Calculer la puissance du poids sur cette même ascension.
3. Commenter le signe du poids et du travail.
4. Comparer la puissance avec celle d'une ampoule consommant 7,2 W pour un éclairage équivalent de 100 W.
5. Commenter le signe du poids et du travail.

Solution

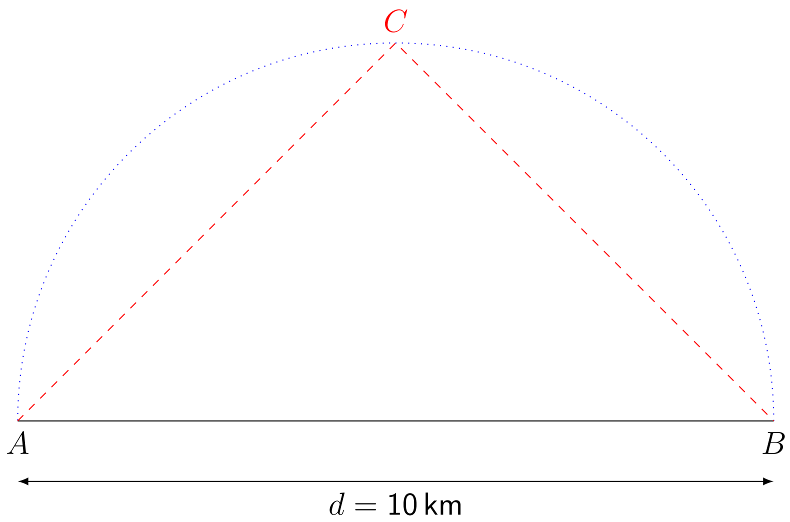
1. $W_{AB}(\overrightarrow{P}) = -mgh = 950\,\text{kJ}$
2. $P = -mg\frac{h}{\Delta t} = -311\,\text{W}$
3. Le poids s'oppose à l'ascension, donc la force est résistive au mouvement, ce qui se traduit par un travail et une puis-

sance négative.
4 $|P| \simeq 40P_{\text{amp}}$, il peut allumer environ 40 ampoules pendant son heure d'ascension.

1 Cas direct : $W_{AB}(\vec{f}) = -\lambda v d$ Cas demi-cercle : $W_{AB}(\vec{f}) = -\lambda v \frac{\pi d}{2}$ Cas ACB : $W_{AB}(\vec{f}) = -\sqrt{2}\lambda v d$

Application 3 : Chemin réel ou fictif ?

Énoncé
Une voiture se déplace du point A vers le point B en suivant trois chemins différents. Sur chaque chemin, la voiture roule à la limite de vitesse autorisée $v = ||\vec{v}|| = 50\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$.
Nous utilisons comme modèle pour les frottements de l'air : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, avec λ une constante.



1 Pour chaque trajectoire, calculer le travail des forces de frottements.
Solution

Application 4 : Glissade sans frottements

Énoncé Nous étudions le mouvement d'un mobile sur un plan incliné. Le mobile, de masse m est supposé ponctuel, nous le repérons par le point M. Il est lâché sans vitesse initiale. Nous négligeons toute forme de frottements.
Nous prenons l'axe $\vec{e_x}$ orienté dans le sens de la pente de telle sorte que $\vec{v} = v(x)\vec{e_x}$
1 Faire un schéma.
2 Faire le bilan des actions mécaniques s'exerçants sur M.
3 En utilisant un théorème énergétique, en déduire une équation différentielle sur la vitesse v.
Solution
1 Schéma plan incliné.
2 BAME : poids, réaction du support (uniquement la composante normale car pas de frottements). Référentiel : terrestre supposé galiléen (attention par de P ni de W sans référentiel d'étude !) $P(poids) = mgvsin(\alpha)$ (force motrice) $P(reaction) = 0$ (force qui ne travail pas)
3 Nous utilisons le TPC (théorème de la puissance cinétique) :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i P_i(\overrightarrow{F_{i\to M}})$$

, on en déduit :

$$\dot{v} = g\sin(\alpha)$$

(la question s'arrête ici, mais il ne reste qu'un pas pour déterminer le mouvement $x(t) = \frac{1}{2} g \sin(\alpha) t^2$, chute libre inclinée.)

Application 5 : Chute libre

Énoncé Soit une masse m en chute libre repérée par un point M. Nous la lâchons sans vitesse initiale depuis le point $z(t=0) = 0$. Nous orientons l'axe $\vec{e_z}$ vers le bas.
Tous les frottements sont négligés, et nous nous plaçons dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ dirigé selon $\vec{e_z}$.
1 Faire un schéma.
2 Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.
3 En utilisant un théorème énergétique, déterminer la vitesse de la bille après une chute d'une hauteur h.

Solution
1 Schéma chute libre.
2 Référentiel : terrestre, galiléen.
$Ep = -mgz + C^{ste}$, nous prenons la constante nulle à $z = 0$, d'où $E_p = -mgz$.
3 TPC (théorème de la puissance mécanique (forme intégral)) ou TEM (théorème de l'énergie mécanique (forme instantané)) :
$v(h) = \sqrt{2gh}$.

Application 6 : Pendule

Énoncé Nous considérons un pendule pensant simple de masse supposée ponctuelle m de longuer ℓ pour lequel toutes les formes de frottements sont négligées. Nous travaillons dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La masse de la tige est négligée.
1 Donner l'expression de l'énergie cinétique de la masse du pendule en coordonnées polaires.
2 Donner l'expression de l'énergie potentielle du poids dans la même base.
3 Que peut-on dire du travail de la tension de la tige ?
4 En appliquant le théorème de la puissance mécanique, en déduire une équation différentielle sur le mouvement angulaire θ.

Solution
1 Faire schéma pendule. $E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$
2 $Ep = -mgz = -mgl\cos(\theta)$ avec z orienté vers le bas et origine sur l'axe du pendule.
3 $\vec{v}$ et $\vec{T}$ sont orthogonaux, donc le travail de la tension est nulle (de même la puissance est nulle).
4 $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$ car aucune force non conservative ne travaille. On en déduit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{m}\sin(\theta) = 0$$

(idem PFD mais plus rapide, car une seule équation pour une seule information).