M5 | Mécanique

Solide en rotation autour d'un axe fixe

Prérequis

Notions mathématiques : vecteur, projection de vecteur	Lycée et prépa
Notions mathématiques : produit scalaire, produit vectoriel	Prépa
Notion mathématiques : dérivées usuelles, dérivée d'une fonction composée, intégration de fonctions usuelles, résolution d'équation différentielle d'ordre 1 et 2	Lycée, prépa et FO6
Force, point matériel, PFD	M1 à M3
Oscillateurs cas du pendule pesant simple	M4

I Description d'un solide

I.A Défintion

À connaitre

Qu'est qu'un solide $\rightarrow$ Définition.

I.B Mouvement d'un solide

À connaitre

Translation vs rotation. Translation rectiligne vs translation circulaire.

Savoir-faire

Distinguer une rotation d'une translation circulaire.

II Inertie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

II.A Moment d'inertie d'un solide autour d'un axe

À connaitre

Définition du moment d'inertie J_Δ : répartition de la masse autour d'un axe.

Savoir-faire

Calculer le moment d'inertie d'un solide autour d'un axe Δ.

Application 1 : Calcul d'un moment d'inertie

Énoncé

Soit un point M quelconque de l'espace repéré en coordonnées cylindrique par $M(r, \theta, z = 0)$.

Il est astreint à se déplacer dans le plan $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.
1 Déterminer la vitesse du point M dans la base cylindrique.
2 En déduire l'expression du moment cinétique sur l'axe $(O, \overrightarrow{e_z})$.

Solution
1 Rappel de cours : $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$
2

$$\overrightarrow{L_O} = mr\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{v}$$
$$\overrightarrow{L_O} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$$

II.B Moment d'inertie d'un solide

À connaitre

Généralisation du moment d'inertie autour d'un axe en 3D : matrice I

Savoir-faire

Déterminer le moment d'inertie autour d'un axe à partir du moment d'inertie donné dans sa base propre.

II.C Moment cinétique

À connaitre

Définition du moment cinétique : $L_\Delta = J_\Delta\omega$, où ω est la vitesse de rotation autour de l'axe Δ du solide

À connaitre

Généralisation 3D (voir TSI2-SI-mécanique) : $\overrightarrow{L} = I\overrightarrow{\Omega}$

Savoir-faire

Calculer le moment d'inertie d'un solide autour de son axe de rotation Δ.

III Moment d'une force

III.A Définition

À connaitre

- ☐ moment d'une force de point d'application A en O : $\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F}$;
- ☐ moment d'une force autour d'un axe $\Delta = (O, \overrightarrow{u})$: $M_\Delta(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{u}$

Savoir-faire

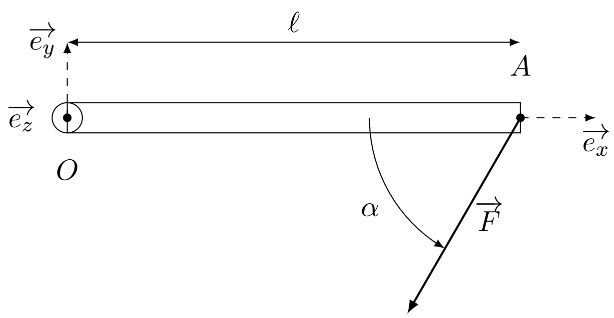
Utiliser une des techniques suivantes pour calculer le moment d'une force :
- ⇝ calcul vectoriel ;

- bras de levier ;
- propriété du produit scalaire.

Application 2 : Calcul du moment d'un force

Énoncé

Nous cherchons à ouvrir une porte en appliquant une force $\overrightarrow{F}$ comme représentée sur le schéma ci-dessous.



(1) Sans aucun calcul, déterminer le signe du moment de la force $\overrightarrow{F}$ autour de l'axe $\Delta = (0, \overrightarrow{e_z})$: M_Δ.

(2) Déterminer l'expression de M_Δ par une des trois méthodes suivantes :

- calcul vectoriel ;
- décomposition de la force en composante orthogonale et longitudinale ;
- bras de levier.

Solution

(1) La méthode de la main droite permet de déterminer que $M_\Delta < 0$.

(2) Méthode vectorielle

Nous projetons la force dans la base cartésienne :

$$\overrightarrow{F} = -F \left| \begin{array}{l} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{array} \right.$$

Nous calculons le moment par rapport au point O :

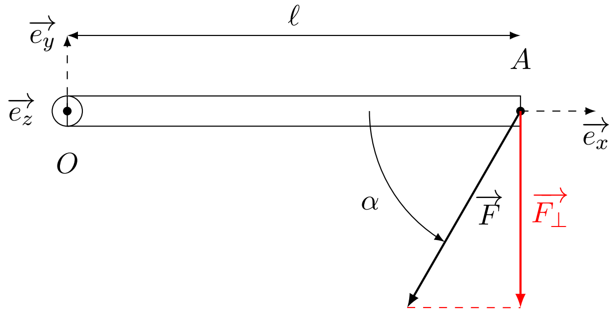
$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F}$$
$$\overrightarrow{M_O} = \ell\overrightarrow{e_x} \wedge -F\left(\cos(\alpha\overrightarrow{e_x} + \sin(\alpha)\overrightarrow{e_y}\right)$$
$$\overrightarrow{M_O} = -\ell F \sin(\alpha)\overrightarrow{e_z}$$

Le moment sur l'axe Δ est alors la projection de $\overrightarrow{M_O}$ sur $\overrightarrow{e_z}$:

$$M_\Delta = -\ell F \sin(\alpha)$$

Méthode de la projection orthogonale

Seule la composante orthogonale ne joue sur le moment :



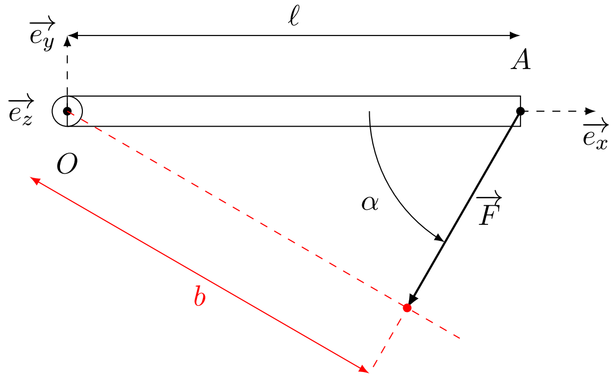
Le moment sur l'axe Δ s'écrit alors :

$$M_\Delta = \pm \ell F_\perp$$

où $\pm$ indique le sens de rotation déterminer par la règle de la main droite. Ainsi :

$$M_\Delta = -\ell F_\perp = -\ell F \sin(\alpha)$$

Méthode du bras de levier
Dans cette méthode, nous cherchons la distance la plus courte entre O et la droite d'application de la force : b



Le moment autour de l'axe Δ est alors : $M_\Delta = \pm bF$ avec $\pm$ suivant le sens de rotation.
Ainsi : $M_\Delta = -\ell \sin(\alpha) F$

III.B Couple de force

À connaitre

Définition d'un couple de force : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{C} = \sum \vec{M}_O(\vec{F})$. Un couple ne dépendant pas du point choisi.

À connaitre

Liaison pivot parfaite : pas de couple résistant.

IV Théorème du moment cinétique

IV.A Énoncé

À connaitre

Théorème du moment cinétique : pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, dans un référentiel galiléen : $\dfrac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum M_{i,\Delta}(\overrightarrow{F_i})$

Savoir-faire

Déterminer l'équation du mouvement à partir du TMC

IV.B Exemple du pendule pensant

Application 3 : Pendule pensant

Énoncé

Nous considérons un solide de masse m et de moment d'inertie J selon l'axe (Oz) lié au bâti par une liaison pivot parfaite en O. Nous notons G le centre de gravité du solide et $OG = \ell$.

1 Établir l'équation différentielle sur la position angulaire θ du mouvement du solide en rotation autour de l'axe (Oz).

2 La résoudre dans l'approximation de petites oscillations pour un angle initiale nul et une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_\theta}$.

Solution

1

- Schéma ;
- Système : solide de masse m, de moment d'inertie J ;
- BAME : liaison pivot parfaite, couple nul et poids : $m\overrightarrow{g}$, donc de moment en O selon $\overrightarrow{e_z}$: $M_\Delta = -mg\ell\sin(\theta)$
- théorème de moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}J\omega}{\mathrm{d}t} = -mg\ell\sin(\theta)$$
$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{J}\sin(\theta) = 0$$

2 Je reconnais une équation différentielle harmonique dont la solution est :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$
$$\text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{J}}$$

Les conditions initiales sont $\theta(t=0)=0$, ce qui implique $A=0$ et

$$\begin{aligned} v(t=0) &= v_0 \\ \ell\dot{\theta}(t=0) &= v_0 \\ B &= \frac{v_0}{\omega_0 \ell} \end{aligned}$$

Au final : $\theta(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0 \ell}\sin(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mg\ell}{J}}$.