TD M4 | Mécanique

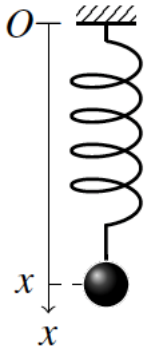
Oscillateur mécaniques

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Pas d’utilisation commerciale – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.

🏠 exercice à préparer à la maison avant le TD ;
♡ exercice classique / important ; à maîtriser pour les concours ;
⚙ ⚙⚙ ⚙⚙⚙ niveau de difficulté de l’exercice.

Exercice 1 : Ressort vertical ♡ ⚙

On s’intéresse au mouvement d’un petit objet de masse m attaché à un ressort dont l’autre extrémité est accrochée à un bâti fixé au sol. Le ressort étant initialement dans sa situation de repos pour laquelle sa longueur est égale à sa longueur à vide, on lâche l’objet sans lui donner de vitesse initiale. Le mouvement qui suit est vertical et on veut l’étudier.



On idéalise le comportement du ressort en l’assimilant à un ressort parfaitement élastique, sans masse, de raideur k et de longueur à vide l_0. On repère la position de l’objet sur un axe (Ox) vertical descendant par son abscisse x. L’origine O du repère est située à l’extrémité fixe du ressort. On néglige les frottements dus à l’air.

1 Montrer que l’équation du mouvement s’écrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

où ω_0 et x_eq sont des constantes à déterminer en fonction de l_0, g, m et k.

2 Que représente la position M_{eq} d’abscisse $x = x_{eq}$?

Pour résoudre l’équation du mouvement, on déplace l’origine du repère en M_{eq}.

3 Montrer que cela revient à faire le changement d’inconnue $X = x - x_{eq}$.
4 En déduire que l’on obtient alors une équation différentielle du mouvement connue.
5 Résoudre en tenant compte des conditions initiales.
6 Représenter l’évolution temporelle de l’abscisse x.

Exercice 2 : Coefficient de viscosité ♡ ⚙⚙

Une sphère de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

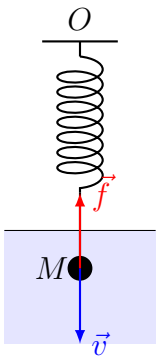
Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité η, la sphère est soumise à une force de frottement donnée par la formule de Stokes :

$$\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$$

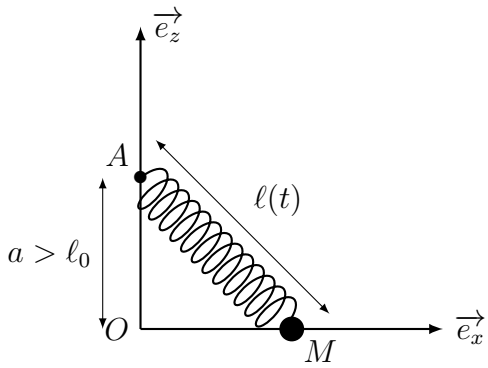
où $\vec{v}$ est la vitesse de la sphère.

1 Écrire l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la pseudo-période T.

2 Dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables, la période des oscillations est T_0. Déterminer le coefficient de viscosité η du liquide en fonction de m, r, T et T_0.



Exercice 3 : Ressort le long d'un rail



1 Déterminer la période T_0 des petites oscillations d'un point matériel M de masse m, assujetti à se déplacer sans frottement sur une droite horizontale, sous l'action d'un ressort (k, ℓ_0) dont l'autre extrémité est fixe en A de cote $a > \ell_0$ (cf. schéma) ?

2 Que se passe-t-il si a devient inférieur à ℓ_0 ?

Exercice 4 : Suspension de voiture

d'après DMGE 2011

On cherche à modéliser le passage d'une voiture sur un champ de bosses de la façon suivante :

- ⇝ La voiture est assimilée à un point matériel P pesant de masse m. Elle avance à une vitesse horizontale $\vec{v}_x$ constante.
- ⇝ La masse m est reliée à un dispositif comportant un ressort de raideur k et de longueur au repos nulle.
- ⇝ Au bout du ressort, une roulette, de rayon négligeable, sans masse suit le profil du sol.

Le dispositif qui maintient le ressort vertical n'est pas spécifié. On suppose simplement qu'il n'intervient pas dans le mouvement de la masse m.

La voiture se déplace tout d'abord sur une route plate, la masse m étant située à la hauteur y_0.

À l'origine du temps et des abscisses, elle arrive sur un champ de bosses dont le profil est supposé avoir une forme sinusoïdale. La hauteur des bosses est notée H et leur longueur L.

Le référentiel $\mathfrak{R}$ est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère (O, x, y, z).

On note $\vec{g} = -g\vec{y}$ l'accélération de la pesanteur.

1 En supposant que le point de contact entre la roulette et le sol se situe sur l'axe du ressort, déterminer l'équation horaire $h(t)$ de ce point en fonction de H, v_x, L et t.

2 En appliquant le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe y, déterminer l'équation différentielle liant y, y_0, H, v_x, L et t.

3 Résoudre cette équation et en déduire l'équation du mouvement $y(t)$ du point matériel P.

4 Pour obtenir un confort maximal, il est nécessaire que la période d'oscillation de la voiture soit égale à celle de la marche à pied, soit T. Déterminer l'expression de la vitesse de la voiture afin d'obtenir un confort maximal.