E5 | Électrocinétique

Régime sinusïdal forcé : électrocinétique complexe

Prérequis

- Électrocinétique en régime continue — E1 à E5
- Méthode de mise en équation d'un circuit électrocinétique — Chapitre E1 à E5
- Utilisation des fonctions trigonotmétrique — Math CPGE
- Utilisation des nombres complexes — Math CPGE

Plan

Savoirs

- Reconnaitre un forçage sinusoïdal : $e(t) = e_0 \cos(\omega t + \varphi_e)$ — I

CC BY NC SA

- Représentation complexe d'un signal sinusoïdal. Qu'est-ce que l'amplitude complexe ? *II*
- Définition de l'impédance complexe $\underline{Z}$ et l'admittance $\underline{Y}$ *III*
- Impédances complexes des dipôles usuels : résistance, bobine et condensateur. *III*
- Loi des mailles, loi des nœuds, association de dipôles en série, association de dipôles en dérivation, pont diviseur de tension, pont diviseur de courant *IV*
- Définition de la résonance *VI*
- Distinction entre les 4 pulsations (ou fréquences) d'un circuit électrocinétique : ω : forçage, ω_0 : pulsation propre, ω_r : pulsation de résonance et ω_e : pulsation d'échantillonnage (cf spé) *VI*
- Définition de la bande passante. Relation entre la bande passante et le facteur de qualité : $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ *VI*

Savoir-Faire

- Donner la forme de la réponse à un forçage sinusoïdal pour un système linéaire (SLCI) : $s(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi_s)$ *I*
- Passer la représentation réelle à la représentation complexe d'un signal *II*
- Passer la représentation complexe à la représentation réelle d'un signal *II*
- Déterminer l'impédance équivalent d'une association quelconque de dipôles (linéaires) *IV*
- Faire l'étude asymptotique d'un circuit électrique : haute fréquence (HF) et basse fréquence (BF) *V*
- Déterminer une grandeur complexe dans un circuit électrique. En déduire la solution réelle par détermination de la phase et de l'amplitude. *V*
- Passer de l'équation différentielle à la solution complexe *V*
- Déterminer la pulsation de résonance d'un circuit. *VI*
- Déterminer la bande passante d'un circuit. *VI*

Application 1 : Association d'un signal réel à sa représentation complexe

Énoncé

Dans la suite, $u_0 > 0$ est une tension, $i_0 > 0$ un courant.

1 Dans les cas suivants, donner la représentation complexe du signal réel :

1. $u(t) = u_0 \cos(\omega t - \pi/4)$
2. $i(t) = i_0 \cos(\omega_0 t)$
3. $u(t) = -u_0 \cos(\omega_0 t)$
4. $u(t) = u_0 \sin(\omega_0 t)$

2 Préciser pour chaque cas la valeur de la phase φ et de l'amplitude A.

3 Dans les cas suivants, donner l'amplitude complexe, l'amplitude A et la phase φ :

1. $\underline{u} = u_0\,\mathrm{e}^{j(\omega t - \pi/3)}$
2. $\underline{u} = -u_0\,\mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{e}^{j\pi/2}$
3. $\underline{u} = u_0 j\,\mathrm{e}^{\pi/4}\,\mathrm{e}^{j\omega t}$

4 Donner alors la représentation réelle de chaque signal complexe.

Solution

aide : $\mathrm{e}^{j\pi} = -1$, $\mathrm{e}^{j\pi/2} = j$, $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$. Faire un cercle trigonométrique pour retrouver rapidement ses formules. Rappel : l'amplitude en nécessairement positive.

Application 2 : Réprésentation d'un déphasage

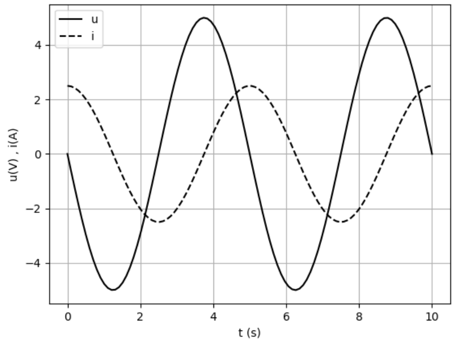
Énoncé

1 Représenter la tension et l'intensité du courant qui traverse une bobine en fonction du temps.

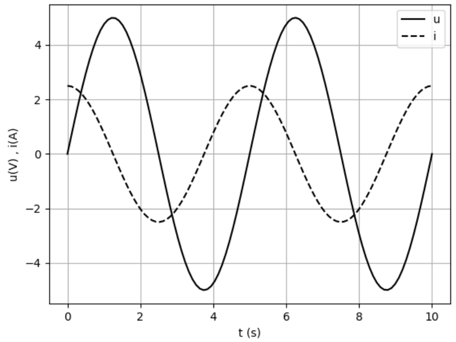
2 Faire de même pour un condensateur

Solution

1 Pour la bobine la tension est en avance de phase $\pi/2$ par rapport au courant :



2 Pour le condensateur, la tension est en retard de phase $\pi/2$ par rapport au courant :



Application 3 : Comportement asymptotique

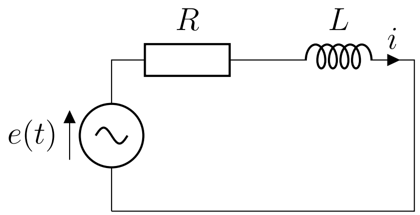
Énoncé

Nous étudions un circuit RL série soumis à un forçage

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

.

CC BY NC SA



1 Déterminer i lorsque $\omega \to 0$.
2 Déterminer i lorsque $\omega \to \infty$.

Solution

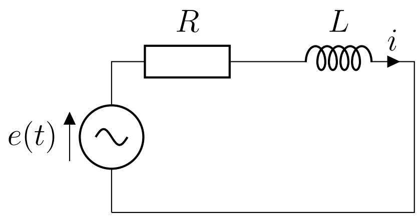
1 Représenter le schéma équivalent. $i = E_0/R$
2 Représenter le schéma équivalent. $i = 0$

Application 4 : Solution à partir de la solution complexe

Énoncé Nous étudions un circuit RL série soumis à un forçage

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

.



1 Quel est le signal complexe associé à la tension $e(t)$?
Nous cherchons une intensité, soumise à un forçage par e, donc de la forme $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

2 Quel est le signal complexe $\underline{i}$ associé à $i(t)$? Quelle est l'amplitude complexe $\underline{I_0}$?
3 Déterminer, par l'étude du circuit, $\underline{i}$ en fonction de E_0, R, L et ω. Montrer que :

$$\underline{I_0} = \frac{E_0}{R + j\omega L}$$

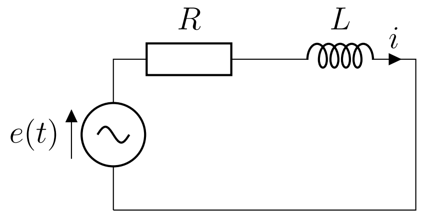
4 Donner l'amplitude I_0 et la phase φ de l'intensité $i(t)$.
5 En déduire l'expression de $i(t)$ en fonction de E_0, R, L et ω.

Application 5 : Passer de l'équation différentielle à la solution complexe

Énoncé Nous étudions un circuit RL série soumis à un forçage

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

.



1 Sans utiliser les complexe, déterminer l'équation différentielle du circuit :

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

2 En déduire l'amplitude complexe $\underline{I_0}$ du courant i en fonction de E_0, R, L et ω.
3 Donner l'amplitude I_0 et la phase φ de l'intensité $i(t)$. En déduire l'expression de $i(t)$ en fonction de E_0, R, L et ω.

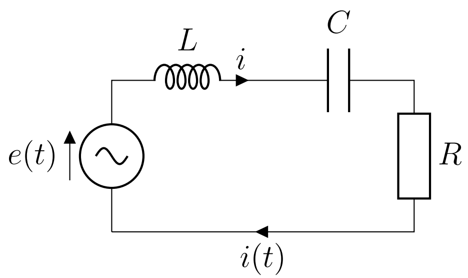
Application 6 : Existence d'une résonance

Énoncé Nous étudions un circuit RLC série soumis à un forçage

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

. Nous cherchons à déterminer la valeur de ω pour laquelle l'intensité $i(t)$ est maximale.
L'intensité $i(t)$ est soumise à un forçage, donc est de la forme :

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$



1 Faire l'étude asymptotique du circuit pour $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$.
2 Déterminer l'impédance équivalente Z_E des trois dipôles en série R, L et C.
3 En déduire l'expression de l'amplitude complexe $\underline{I_0}$ en fonction de E_0, R, L, C et ω.
4 Mettre $\underline{I_0}$ sous la forme canonique :

$$\underline{I_0} = \frac{E_0/R}{1 + jQ\,(x - 1/x)}$$

où Q est le facteur de qualité du circuit et ω_0 la pulsation propre du circuit et $x = \omega/\omega_0$ la pulsation réduite. Exprimer Q et ω_0 en fonction de R, L et C.
5 En déduire l'expression de l'amplitude I_0 en fonction de x. Existe-t-il une valeur de x pour laquelle I_0 est maximal ? Si oui, quelle est cette valeur ?

Application 7 : Bande passante d'un circuit RLC

Énoncé Pour un circuit RLC série nous avons l'amplitude complexe de l'intensité :

$$\underline{I_0} = \frac{E_0/R}{1 + jQ\,(x - 1/x)}$$

avec $x = \omega/\omega_0$ la pulsation réduite, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre du circuit et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité du circuit.
1 Rappeler la définition de la bande passante.
2 Déterminer la largeur de la bande passante $\Delta\omega$ du circuit RLC série.