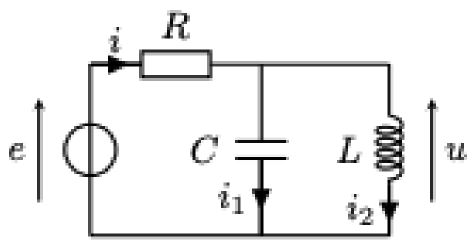
TD E5 | Électrocinétique

Régime sinusoïdal forcé et résonance

- exercice à préparer à la maison avant le TD ;
- exercice classique / important ; à maîtriser pour les concours ;
- niveau de difficulté de l’exercice.

Maîtriser son cours

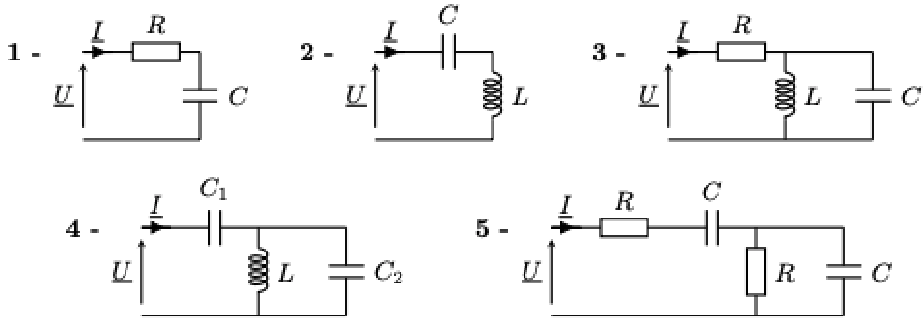
Exercice 1 : Utiliser des impédances



① En appliquant la loi des nœuds et en utilisant les admittances complexes, exprimer l’amplitude complexe $\underline{U}$.
② En déterminant cette fois l’impédance équivalente à l’association L, C puis en identifiant un pont diviseur, retrouver l’amplitude complexe $\underline{U}$.
③ En partant de l’expression de $\underline{U}$ en fonction de $\underline{E}$, déterminer l’équation différentielle vérifiée par u.

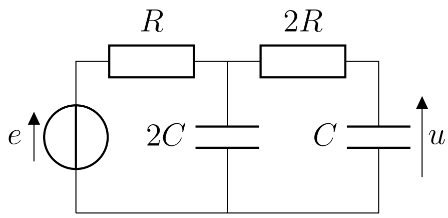
Exercice 2 : Impédance équivalent

Déterminer l’impédance complexe des dipôles ci-dessous. Écrire les résultats sous forme d’une unique fraction, en faisant apparaître des quantités adimensionnées telles que $RC\omega$, $L\omega/R$ et $LC\omega^2$.



Approfondir son cours

Exercice 3 : Équation différentielle : réels ou complexes ?

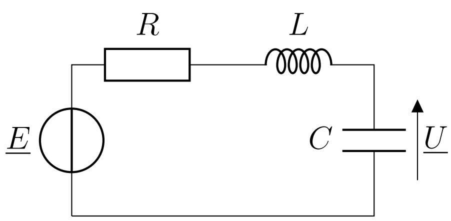


En utilisant les complexes, montrer que la tension u est solution de l'équation différentielle :

$$4\tau^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + 5\tau \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = e \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

Exercice 4 : Résonance en tension d'un RLC

Considérons un circuit RLC série aux bornes duquel un générateur impose un forçage sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude E_0. On se place en régime permanent, et on travaille en représentation complexe.



(1) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ de la tension aux bornes du condensateur en fonction de $\underline{E}$ et des différents dipôles.
(2) Identifier la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q tels que

$$\underline{U} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j\omega}{Q\omega_0}}$$

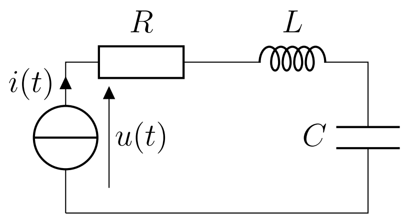
(3) Identifier la fonction f telle que :

$$|\underline{U}| = \frac{E_0}{\sqrt{f(X)}} \quad \text{avec} \quad X = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

(4) À quelle condition sur f observe-t-on un phénomène de résonance ?
En travaillant sur la dérivée f', en déduire une condition sur Q pour que la résonance soit effectivement observable.
(5) Déterminer la pulsation de résonance.

Exercice 5 : Résonance en courant

d'après E. Thibierge Considérons un circuit RLC série alimenté par un générateur idéal de courant imposant $i(t) = I_m cos(\omega t)$.



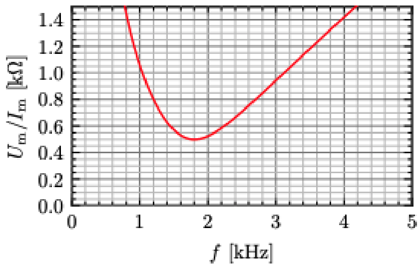
(1) Déterminer l'amplitude complexe $\underline{U}$ et l'écrire sous la forme :

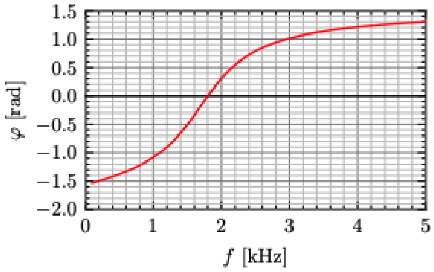
$$\underline{U} = R\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]\underline{I}$$

(2) Justifier que ce circuit ne présente pas de résonance en tension, mais une anti-résonance pour laquelle le rapport U_m/I_m est minimal. Déterminer la pulsation d'anti-résonance ω_a. Que vaut le déphasage entre i et u à cette pulsation ? L'existence de l'anti-résonance dépend-elle du facteur de qualité du circuit ?
(3) (très calculatoire) On s'intéresse à la largeur en fréquence de l'anti-résonance. Montrer que les pulsations ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$ telles que :$|\underline{U}(\omega_1)| = |\underline{U}(\omega_2)| = \sqrt{2}|U(\omega_a)|$ sont données par :

$$\omega_{1,2} = W \pm \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{avec} \quad W = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{1/Q^2 - 4}$$

En déduire la largeur de la bande passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ de l'anti-résonance.
(4) Des relevés expérimentaux de U_m/I_m et du déphasage de u par rapport à i sont représentés figure ci dessous. En déduire la fréquence propre et le facteur de qualité du circuit.





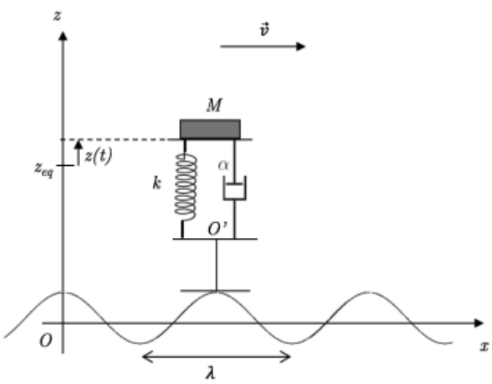
Aller plus loin

Exercice 6 : Interprétation du faceur de qualité

Exercice classique : le skieur peut être remplacé par une voiture sur des dodane

Cet exercice s'intéresse à un skieur qui dévale une piste de bosses. On se pose la question de la vitesse à choisir pour subir le moins possible les oscillations de la piste.

On modélise le skieur et ses skis le plus simplement possible : une masse m pour le torse, en contact avec le sol via un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, et un amortisseur de coefficient d'amortissement α pour l'ensemble {jambes+skis}, en contact ponctuel avec la neige (voir schéma ci-dessous).



Le skieur se déplace à une vitesse $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{e_x}$, sur une piste dont le profil impose à O' de suivre une côte $z_{O'} = L + h(t)$ avec $h(t) = E_m \cos\left(2\pi\frac{x(t)}{\lambda}\right)$, * étant l'abscisse du point O'.

On note z_{eq} l'altitude du skieur lorsqu'il est à l'équilibre (skieur immobile au repos, pas de bosses donc $h(t) = 0$).

Le mouvement vertical du skieur est repéré par la côte $z(t)$, qui est la différence la position du skieur et sa position z_{eq} lorsqu'il est à l'équilibre.

Enfin, la force exercée par l'amortisseur s'écrit : $\overrightarrow{F} = -\left(\dot{z}(t) - \dot{z}_{O'}(t)\right)\overrightarrow{e_z}$.

1 Donner l'expression de $x(t)$ en supposant que O' se trouve à la verticale de O à l'instant initial. En déduire l'expression de la pulsation ω du forçage du système en fonction de λ et de v. On conservera la notation ω dans ce qui suit.

(2) Faire un bilan des forces s'exerçant sur la masse, et exprimer chaque force en fonction de $\overrightarrow{e_z}$ et des paramètres du problème (dont $z(t)$ et sa dérivée, L, $h(t)$ et sa dérivée, k, l_0, α, z_{eq}).
(3) On s'intéresse à la position d'équilibre. Montrer que z_{eq} vérifie :

$$-k(z_{eq} - L - l_0) - mg = 0$$

.
(4) Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$. Montrer quelle peut se mettre sous la forme suivante :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{\omega_0}{Q}\dot{h} + \omega_0^2 h(t)$$

où l'on exprimera ω_0 et Q en fonction des paramètres du système.
(5) On notera $\underline{Z_m}$ l'amplitude complexe associée à $z(t)$. Donner la forme du signal complexe associé à $z(t)$. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{Z_m}$. Montrer ensuite que l'amplitude Z_m des oscillations verticales du skieur est donnée par la relation : $Z_m = \frac{\sqrt{1+x^2/Q^2}}{\sqrt{(1-x^2)^2+x^2/Q^2}} E_m$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$
(6) Le graphique ci-dessous montre l'évolution du rapport Z_m/E_m en fonction de x pour plusieurs valeurs de Q. Quelles sont alors les solutions pour réussir à descendre la piste sans trop de peine ?