M6 | Mécanique

Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

Prérequis

	Notions mathématiques : produit scalaire, intégration, dérivation	Lycée et prépa
	Cinématique du point : vecteurs position, vitesse, accélération	M1 – Cinématique
	Principe fondamental de la dynamique	M2 – Dynamique

I Puissance, travail et énergie cinétique

I.A Travail et puissance d'une force

À connaitre

- ☐ travail élémentaire d'une force $\overrightarrow{F}$ sur un déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$: $\delta W(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$;
- ☐ puissance d'une force : $\mathcal{P}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v} = \dfrac{\delta W(\overrightarrow{F})}{\mathrm{d}t}$.

À connaitre

Une force perpendiculaire à la vitesse ou au déplacement à tout instant ne travaille pas (réaction normale, force magnétique, tension d'un fil inextensible...).

Savoir-faire

Reconnaître si une force travaille ou non, et déterminer son caractère moteur ($\mathcal{P} > 0$) ou résistant ($\mathcal{P} < 0$).

I.B Travail d'une force entre deux points

À connaitre

Travail d'une force entre A et B : $W_{A\to B}(\overrightarrow{F}) = \displaystyle\int_A^B \overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$. Il s'agit, a priori, d'une intégrale curviligne dépendant du chemin suivi.

Savoir-faire

Calculer le travail des forces usuelles (poids, force de gravitation, force de rappel d'un ressort, force de frottement).

Application 1 : Travail du poids

Énoncé

On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m, astreint à glisser sans frottement sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On repère la position de M par son altitude z dans le référentiel terrestre galiléen, muni de la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ avec $\overrightarrow{e_z}$ vertical ascendant. Le point M part du point A, d'altitude z_A, et glisse jusqu'au point B, d'altitude $z_B < z_A$.

1 Exprimer le travail élémentaire $\delta W(\overrightarrow{P})$ du poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$ lors d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ du point M.

2 En déduire, par intégration, le travail $W_{A\to B}(\overrightarrow{P})$ du poids entre les points A et B. Commenter sa dépendance (ou non) au chemin suivi.

3 Calculer la puissance instantanée $\mathcal{P}(\overrightarrow{P})$ du poids en fonction de $\dot{z}$, puis en fonction de α et de la norme v de la vitesse de M le long du plan incliné.

Solution

1 Le travail élémentaire d'une force $\overrightarrow{F}$ lors d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ est défini par

$$\delta W(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}.$$

Avec $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$, il vient

$$\delta W(\overrightarrow{P}) = -mg\ \mathrm{d}z.$$

Remarque : si le $\overrightarrow{e_z}$ est descendant, $\delta W(\overrightarrow{P}) = +mg\,\mathrm{d}z$.

2 Le travail élémentaire ne dépend que de $\mathrm{d}z$: le poids est donc une force conservative. Le travail entre A et B s'obtient par intégration le long de la trajectoire :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{P}) = \int_A^B \delta W(\overrightarrow{P}) = \int_{z_A}^{z_B} -mg\ \mathrm{d}z = -mg(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B).$$

Le résultat ne dépend que des altitudes initiale et finale, et non du chemin suivi entre A et B : on retrouve le caractère conservatif du poids. Comme $z_B < z_A$, on a $W_{A\to B}(\overrightarrow{P}) > 0$: le poids est moteur, ce qui est cohérent avec une descente.

Remarque : si $\overrightarrow{e_z}$ est descendant, $W_{A\to B} = mg(z_B - Z_A)$, avec attention avec $z_B > z_A$, donc $W(\overrightarrow{P}) > 0$. L'origine des z a changé.

3 La puissance instantanée d'une force est $\mathcal{P}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{\delta W(\overrightarrow{F})}{\mathrm{d}t}$, donc ici

$$\mathcal{P}(\overrightarrow{P}) = -mg\dot{z}.$$

En notant α l'angle du plan incliné par rapport à l'horizontale, et v la norme de la vitesse le long du plan (orientée vers le bas), on a $\dot{z} = -v\sin\alpha$, d'où

$$\mathcal{P}(\overrightarrow{P}) = mgv\sin\alpha.$$

On vérifie que $\mathcal{P}(\overrightarrow{P}) > 0$: le poids fournit de la puissance au point matériel lors de la descente.

I.C Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique

À connaitre

- ☐ énergie cinétique d'un point matériel : $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$;
- ☐ théorème de l'énergie cinétique (référentiel galiléen) : $E_{c,B} - E_{c,A} = \sum_i W_{A\to B}(\overrightarrow{F_i})$;
- ☐ théorème de la puissance cinétique (référentiel galiléen) : $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}(\overrightarrow{F_i})$.

Savoir-faire

Déterminer l'équation du mouvement ou une vitesse à l'aide d'un théorème énergétique.
Méthode :

- ⇝ si on veut la vitesse en un point : théorème de l'énergie cinétique entre ce point et un point où l'on connait la vitesse ;
- ⇝ si on veut l'équation différentielle : théorème de la puissance cinétique ;

Application 2 : Théorème de l'énergie cinétique

Énoncé

Un point matériel M, de masse m, est lâché sans vitesse initiale au sommet A d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Le glissement de M sur le plan s'effectue avec un frottement solide, modélisé par une force $\overrightarrow{f} = -f\,\overrightarrow{u}$ colinéaire et opposée à la vitesse, de norme f constante. On note ℓ la distance parcourue par M le long du plan entre les points A et B, et v_B la norme de la vitesse de M en B.

1. Faire un bilan des forces s'exerçant sur M et calculer le travail de chacune d'entre elles entre A et B.
2. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre A et B, exprimer v_B en fonction de m, g, α, f, ℓ.
3. Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de la puissance cinétique, puis en intégrant l'équation obtenue.

Solution

1. Le point M est soumis à :

- ☐ son poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$;
- ☐ la réaction normale du plan $\overrightarrow{N}$, perpendiculaire au déplacement ;
- ☐ la force de frottement $\overrightarrow{f} = -f\,\overrightarrow{u}$, colinéaire et opposée à la vitesse.

La réaction normale ne travaille pas, car elle est à tout instant perpendiculaire au déplacement élémentaire :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{N}) = 0.$$

Le poids est une force conservative, dont le travail ne dépend que de la dénivellation. Entre A et B, séparés d'une longueur ℓ le long du plan, la dénivellation est $\ell\sin\alpha$, d'où

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{P}) = mg\,\ell\sin\alpha.$$

La force de frottement est colinéaire et opposée au déplacement à chaque instant, donc

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = \int_A^B \overrightarrow{f}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -f\ell.$$

(2) Le théorème de l'énergie cinétique entre A et B s'écrit

$$E_{c,B} - E_{c,A} = W_{A\to B}(\overrightarrow{P}) + W_{A\to B}(\overrightarrow{N}) + W_{A\to B}(\overrightarrow{f}).$$

Avec $E_{c,A} = 0$ (départ sans vitesse initiale) et $E_{c,B} = \frac{1}{2}mv_B^2$, il vient

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mg\ell\sin\alpha - f\ell,$$

soit

$$v_B = \sqrt{2\ell\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)}.$$

Ce résultat n'a de sens physique que si $g\sin\alpha > f/m$, condition nécessaire à la mise en mouvement de M.

(3) Le théorème de la puissance cinétique, version instantanée du théorème précédent, s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\overrightarrow{P}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{N}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{f}).$$

En notant v la norme de la vitesse de M le long du plan, $\mathcal{P}(\overrightarrow{N}) = 0$, $\mathcal{P}(\overrightarrow{P}) = mgv\sin\alpha$ et $\mathcal{P}(\overrightarrow{f}) = -fv$, d'où

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mgv\sin\alpha - fv \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\sin\alpha - \frac{f}{m}.$$

Le membre de droite étant constant, v croît linéairement avec t : $v(t) = \left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)t$. En intégrant une seconde fois, on obtient la loi horaire $\ell(t) = \frac{1}{2}\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)t^2$, et en éliminant t entre les deux relations, on retrouve bien

$$v_B = \sqrt{2\ell\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)}.$$

II Force conservative et énergie potentielle

II.A Définition

À connaitre

Une force est **conservative** si son travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi. Elle dérive alors d'une énergie potentielle E_p : $\delta W(\overrightarrow{F}) = -\,\mathrm{d}E_p$, soit $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(E_p)$.

À connaitre

À une dimension : $F_x = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$. L'énergie potentielle est définie à une constante additive près.

Savoir-faire

Établir qu'une force est conservative et déterminer l'énergie potentielle associée.

II.B Énergies potentielles usuelles

À connaitre

- ☐ pesanteur : $E_p = mgz +$ cste avec z vertical ascendant ;
- ☐ pesanteur : $E_p = -mgz +$ cste avec z vertical descendant ;
- ☐ force de rappel élastique : $E_p = \dfrac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 +$ cste ;
- ☐ interaction gravitationnelle : $E_p = -\dfrac{GMm}{r} +$ cste.

Savoir-faire

Retrouver ces expressions par intégration du travail élémentaire.

Application 3 : Énergies potentielles usuelles

Énoncé

On souhaite déterminer l'énergie potentielle associée à deux forces conservatives usuelles.
(1) Un point matériel M de masse m est accroché à un ressort de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0, dont l'autre extrémité est fixée en O. On note ℓ la longueur du ressort (soit la distance OM) et $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire dirigé de O vers M.
a - Rappeler l'expression de la force exercée par le ressort sur M : $\overrightarrow{F_r}$.
b - Montrer que $\overrightarrow{F_r}$ est conservative et déterminer l'énergie potentielle élastique $E_{p,\text{el}}(\ell)$ associée, en prenant $E_{p,\text{el}}(\ell_0) = 0$.
(2) Un point matériel M de masse m est soumis à l'attraction gravitationnelle d'un astre de masse M_T situé en O, supposé à symétrie sphérique. Cette force s'écrit $\overrightarrow{F} = -\dfrac{GM_Tm}{r^2}\overrightarrow{e_r}$, où $r = OM$. Montrer que $\overrightarrow{F}$ est conservative et déterminer l'énergie potentielle de gravitation $E_{p,\text{grav}}(r)$ associée, en choisissant la convention $E_{p,\text{grav}}(r \to \infty) = 0$.

Solution

(1) Le travail élémentaire de la force de rappel s'écrit, pour un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{u}$ (mouvement 1D),

$$\delta W(\overrightarrow{F_r}) = \overrightarrow{F_r}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -k(\ell-\ell_0)\,\mathrm{d}\ell,$$

Ce travail élémentaire ne dépend que de la variable ℓ et de sa variation $\mathrm{d}\ell$: il s'écrit donc comme l'opposé de la différentielle d'une fonction de ℓ seule. La force est donc conservative, et l'on pose

$$\delta W(\overrightarrow{F_r}) = -\,\mathrm{d}E_{p,\text{el}} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}E_{p,\text{el}} = k(\ell-\ell_0)\,\mathrm{d}\ell.$$

Par intégration sur $\mathrm{d}\ell$,

$$E_{p,\text{el}}(\ell) = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2 + \text{cste}.$$

La condition $E_{p,\text{el}}(\ell_0) = 0$ impose une constante nulle, d'où

$$\boxed{E_{p,\text{el}}(\ell) = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2}.$$

(2) De même, en coordonnées sphériques, le déplacement élémentaire s'écrit $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + \dots$, et seule la composante radiale contribue au travail de $\overrightarrow{F}$, qui est purement

radiale :

$$\delta W(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\frac{GM_T m}{r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Ce travail élémentaire ne dépend que de r et de $\mathrm{d}r$: la force gravitationnelle est donc conservative. On pose $\delta W(\overrightarrow{F}) = -\,\mathrm{d}E_{p,\text{grav}}$, soit

$$\mathrm{d}E_{p,\text{grav}} = \frac{GM_T m}{r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Par intégration,

$$E_{p,\text{grav}}(r) = -\frac{GM_T m}{r} + \text{cste}.$$

La convention $E_{p,\text{grav}}(r \to \infty) = 0$ impose une constante nulle, d'où

$$\boxed{E_{p,\text{grav}}(r) = -\frac{GM_T m}{r}}.$$

On retiendra que cette énergie potentielle est toujours négative, et tend vers 0 lorsque les deux corps s'éloignent infiniment.

III Énergie mécanique

III.A Définition et théorème de l'énergie mécanique

À connaitre

Énergie mécanique : $E_m = E_c + E_p$, où E_p regroupe les énergies potentielles de toutes les forces conservatives.

À connaitre

Théorème de l'énergie mécanique : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc}$ et $\Delta E_m = W_{nc}$. Où nc fait référence à non conservative donc toutes les forces non comptées dans E_p.

Savoir-faire

Faire un bilan énergétique pour déterminer une variation d'énergie mécanique due aux forces dissipatives.

III.B Mouvement conservatif

À connaitre

Si toutes les forces qui travaillent sont conservatives, le mouvement est dit **conservatif** : l'énergie mécanique se conserve, $E_m =$ cste.

Savoir-faire

Reconnaître un mouvement conservatif et exploiter $E_m =$ cste comme intégrale première du mouvement.

IV Mouvement conservatif à une dimension

IV.A Lecture graphique de l'énergie potentielle

À connaitre

Pour un mouvement conservatif à une dimension, $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) =$ cste. Le domaine accessible vérifie $E_p(x) \leqslant E_m$ (car $E_c \geqslant 0$).

Savoir-faire

Décrire qualitativement un mouvement (domaine accessible, état lié ou de diffusion, points de rebroussement) à partir du graphe de $E_p(x)$ et de la valeur de E_m.

IV.B Positions d'équilibre et stabilité

À connaitre

- ☐ position d'équilibre : $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 0$ (force nulle) ;
- ☐ équilibre stable : minimum de E_p, soit $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} > 0$;
- ☐ équilibre instable : maximum de E_p, soit $\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2} < 0$.

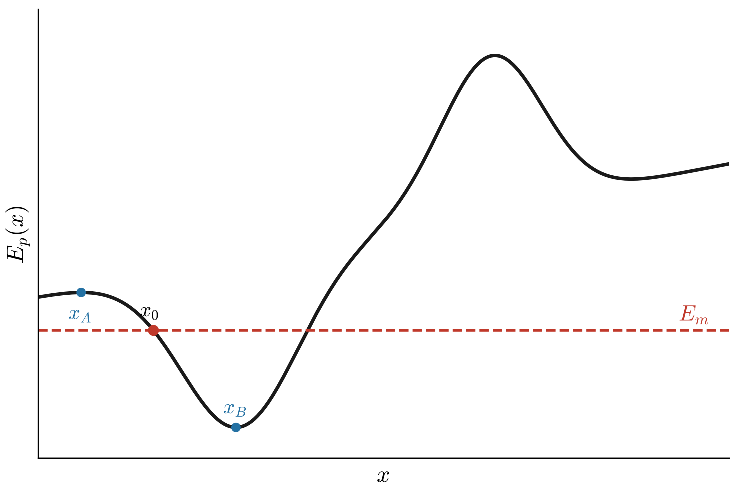
Savoir-faire

Déterminer les positions d'équilibre et discuter leur stabilité à partir de l'allure de $E_p(x)$.

Application 4 : Lecture graphique d'une énergie potentielle

Énoncé

Un point matériel M de masse m se déplace sur un axe (Ox). Son mouvement est conservatif et son énergie potentielle $E_p(x)$ est représentée ci-dessous. On note x_A et x_B deux positions particulières, identifiées sur le graphique, en lesquelles la tangente à la courbe est horizontale. À l'instant initial, M est lâché en x_0 avec une vitesse nulle.



(1) Justifier que l'énergie mécanique E_m de M se conserve au cours du mouvement, et expliquer pourquoi elle peut être représentée par la droite horizontale tracée sur le graphique.
(2) Identifier la nature des positions x_A et x_B (positions d'équilibre) et discuter de leur stabilité à partir de l'allure locale de $E_p(x)$.
(3) Déterminer le domaine accessible au point matériel M à partir des conditions initiales données. Le mouvement est-il borné ?
(4) Décrire qualitativement le mouvement de M : sens de parcours, évolution de sa vitesse, comportement aux bornes du domaine accessible.

Solution

(1) Le mouvement de M est dit conservatif car M n'est soumis qu'à des forces conservatives (ou ne travaillant pas). Le théorème de l'énergie mécanique donne alors

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\text{forces non conservatives}) = 0,$$

donc $E_m = E_c + E_p(x)$ est une constante du mouvement, fixée par les conditions initiales. Comme M est lâché en x_0 avec une vitesse nulle, $E_c(t=0) = 0$ et

$$E_m = E_p(x_0).$$

Puisque E_m est une constante (indépendante de x), elle est représentée par une droite horizontale sur le graphique $E_p(x)$, à l'ordonnée $E_p(x_0)$.
(2) Une position d'équilibre correspond à une tangente horizontale sur la courbe $E_p(x)$, c'est-à-dire $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = 0$, ce qui équivaut bien à une force nulle en cette position puisque $F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$.

- ☐ En x_A, la courbe présente un **maximum local** : c'est une position d'équilibre **instable**. Si M est légèrement écarté de x_A, la force $F_x = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$ l'éloigne davantage de cette position.
- ☐ En x_B, la courbe présente un **minimum local** : c'est une position d'équilibre **stable**. Si M est légèrement écarté de x_B, la force tend à le ramener vers x_B.

(3) Le mouvement de M n'est physiquement possible qu'aux positions x telles que $E_c(x) = E_m - E_p(x) \geqslant 0$, soit $E_p(x) \leqslant E_m$. Graphiquement, le domaine accessible correspond donc à la portion de l'axe des abscisses pour laquelle la courbe $E_p(x)$ se situe sous la droite horizontale E_m.
D'après le graphique, en partant de x_0 (où $E_p(x_0) = E_m$, donc $E_c = 0$), le point matériel ne peut pas franchir la barrière de potentiel à gauche (en x_A, où $E_p(x_A) > E_m$), ni la grande barrière à droite (où $E_p(x)$ dépasse E_m après le minimum x_B). Le mouvement est donc borné entre x_0 et un second point d'arrêt $x_1 > x_B$, situé à l'intersection suivante entre la courbe $E_p(x)$ et la droite E_m (point de rebroussement symétrique de x_0 par rapport au puits).
(4) Le point matériel part de x_0 avec une vitesse nulle. La force associée, $F_x = -\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}x$, y est non nulle et orientée vers les x croissants (puisque E_p décroît localement) : M accélère donc vers la droite. Sa vitesse (en valeur absolue) croît tant que $E_p(x)$ diminue, est maximale au minimum d'énergie potentielle x_B (là où E_c est maximale), puis diminue lorsque M remonte la pente vers x_1. En x_1, point de rebroussement, la vitesse s'annule à nouveau et M repart en sens inverse vers x_0.
Le mouvement est donc périodique : M oscille indéfiniment entre les deux points d'arrêt x_0 et x_1, de part et d'autre de la position d'équilibre stable x_B, sans jamais pouvoir franchir les barrières de potentiel situées en dehors de cet intervalle.

IV.C Oscillateurs mécaniques : bilan d'énergie

IV.C.1 Approximation harmonique au voisinage d'un équilibre stable

À connaitre

Au voisinage d'un minimum x_e de E_p, le développement $E_p(x) \simeq E_p(x_e) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_e}(x - x_e)^2$ modélise un oscillateur harmonique.

IV.C.2 Bilan énergétique de l'oscillateur

À connaitre

Pour l'oscillateur harmonique non amorti, E_c et E_p s'échangent en opposition de phase, l'énergie mécanique restant constante. En moyenne sur une période : $\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{E_m}{2}$.

À connaitre

En présence de frottements, l'énergie mécanique décroît : les oscillations sont amorties : le système n'est plus conservatif.

Savoir-faire

Établir l'équation du mouvement d'un oscillateur par une méthode énergétique et analyser les échanges d'énergie.

Application 5 : Bilan d'énergie d'un oscillateur

Énoncé

Un point matériel M de masse m est accroché à l'extrémité d'un ressort horizontal de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, l'autre extrémité étant fixée à un mur. On repère la position de M par l'écart x à sa position d'équilibre, comptée le long de l'axe (Ox) horizontal. Tout frottement est négligé. À l'instant initial, M est écarté de sa position d'équilibre d'une distance x_m et lâché sans vitesse initiale.

(1) Exprimer l'énergie potentielle $E_p(x)$ du système, l'énergie cinétique E_c, puis l'énergie mécanique E_m en fonction de x et $\dot{x}$.

(2) En exploitant la conservation de l'énergie mécanique, établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. Identifier la pulsation propre ω_0 des oscillations.

(3) Déterminer l'amplitude des oscillations et exprimer l'énergie mécanique E_m en fonction de k et x_m.

(4) Tracer l'allure des énergies $E_c(t)$ et $E_p(t)$ sur une période, et commenter l'échange énergétique entre les deux formes. Que vaut la moyenne temporelle de chacune sur une période ?

Solution

(1) La force de rappel du ressort est conservative et dérive de l'énergie potentielle élastique $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$ (en prenant l'origine des énergies potentielles à la position d'équilibre $x = 0$). L'énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. L'énergie mécanique est donc

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

2 Le mouvement étant sans frottement, le système n'est soumis qu'à des forces conservatives (ou ne travaillant pas) : l'énergie mécanique se conserve, $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$. En dérivant,

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}\,(m\ddot{x} + kx) = 0.$$

Cette relation devant être vérifiée à tout instant, et $\dot{x}$ n'étant pas identiquement nul, on obtient l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

3 La solution générale est $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Les conditions initiales $x(0) = x_m$ et $\dot{x}(0) = 0$ imposent $A = x_m$ et $B = 0$, d'où

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t).$$

L'amplitude des oscillations est donc x_m.
L'énergie mécanique, constante, peut s'évaluer à l'instant initial (où $\dot{x} = 0$) :

$$E_m = \frac{1}{2}kx_m^2.$$

4 À partir de $x(t) = x_m\cos(\omega_0 t)$ et $\dot{x}(t) = -x_m\omega_0\sin(\omega_0 t)$, on obtient

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega_0 t),$$
$$E_c(t) = \frac{1}{2}mx_m^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega_0 t),$$

en utilisant $m\omega_0^2 = k$. On vérifie bien que $E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}kx_m^2 = E_m$ à tout instant.
Les deux énergies oscillent en opposition de phase : lorsque M passe par sa position d'équilibre ($x = 0$), sa vitesse est maximale et toute l'énergie est cinétique ; lorsque M atteint l'élongation maximale ($x = \pm x_m$), sa vitesse s'annule et toute l'énergie est potentielle. L'énergie passe ainsi alternativement d'une forme à l'autre, l'énergie mécanique totale restant constante.
Chacune oscille à la pulsation $2\omega_0$ (double de la pulsation du mouvement) à cause des termes en $\cos^2$ et $\sin^2$. Leur valeur moyenne sur une période, en utilisant $\langle\cos^2\rangle = \langle\sin^2\rangle = \frac{1}{2}$, vaut

$$\langle E_c\rangle = \langle E_p\rangle = \frac{1}{4}kx_m^2 = \frac{E_m}{2}.$$

En moyenne, l'énergie se répartit donc également entre forme cinétique et forme potentielle (théorème d'équipartition pour l'oscillateur harmonique).