M6 | Mécanique

Solide en rotation autour d'un axe fixe

Prérequis

Mécanique	M1 à M5
Produit vectoriel	CPGE
Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 et 2	CPGE

1 Description du mouvement d'un solide

1.1 Définition d'un solide

Définition d'un solide

1.2 Translation et rotation

Définition translation tranlation rectligne et translation circulaire

Définition rotation. Vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ ne dépend pas du point considéré

Identifier une rotation, la distinguer d'une translation circulaire

2 Inertie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

2.1 Moment d'inertie d'un solide

Définition du moment d'inertie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe : J_Δ

Plus la masse d'un solide est éloignée de l'axe de rotation, plus le moment d'inertie est grand

2.2 Moment cinétique selon un axe

Moment cinétique sur un axe Δ : $L_\Delta = \sigma_\Delta = J_\Delta \omega$

3 Moment d'une force et couple

3.1 Moment d'une force

Définition du moment d'une force en un point O : $\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F}$

Moment d'une force par rapport à un axe Δ : $M_\Delta(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{u}$

Déterminer le moment d'une force en utilisant le bras de levier

3.2 Couple de forces

Définition d'un couple de forces : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{C} = \sum \overrightarrow{M_O}(\vec{F})$

Le moment d'un couple de forces est indépendant du point de référence choisi

3.3 Liaison pivot

Définition d'une liaison pivot parfaite : pas de couple résistant

4 Théorème du moment cinétique

4.1 Énoncé

Théorème du moment cinétique autour d'un axe fixe Δ : réf : galiléen : $\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}J_\Delta\omega}{\mathrm{d}t} = \sum_i M_\Delta(\vec{F_i})$

Utiliser le TMC afin de déterminer l'équation du moment d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

Application 1 : Freinage d'une route

Énoncé Soit une roue de moment d'inertie J en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe (Oz). La liaison pivot avec le châssis exerce un un coupe de frottement de la forme :

$$C = -\alpha\omega$$

où α est une constante.

1. Justifier que le $alpha$ est positif.
2. En utiliser le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha}{J}\omega$$

.

3. La roue possède une vitesse angulaire initiale ω_0 à $t = 0$. Déterminer la vitesse angulaire $\omega(t)$ en fonction du temps. Tracer la courbe $\omega(t)$.

Solution

1. Couple résistant. Règle de la main droite.
2. Penser au référentiel d'étude : galiléen !
3. $\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{J}t}$.

4.2 Exemple du pendule pesant

Application 2 : Pendule pesant

Énoncé Nous considérons un solide de moment d'inertie J selon l'axe (Oz) lié au bâti par une liaison pivot parfaite en O. Nous notons G le centre de gravité du solide de masse totale m.
Données : $\overrightarrow{OG} = \ell\overrightarrow{e_r}$
1 Établir l'équation différentielle du mouvement du solide en rotation autour de l'axe (Oz).
2 La résoudre dans l'approximation de petites oscillations pour un angle initiale nul et une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_\theta}$.
Solution
1 Faire un schéma, donner le référentiel et faire le bilan des forces, calculer les moments.

$$\ddot{\theta} + \frac{mLg}{J}\sin\theta = 0$$

2

$$\theta(t) = \frac{v_0}{\omega_0\ell}\sin(\omega_0 t)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{mLg}{J}}$

5 Énergie d'un solide en rotation

5.1 Énergie cinétique d'un solide en rotation

Énergie cinétique d'un solide en rotation : $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$

5.2 Puissance d'un couple de forces

Énergie potentielle de pesanteur : $P = C\omega$

5.3 Théorème de la puissance cinétique pour un solide en rotation

Théorème de la puissance cinétique pour un solide en rotation ;
$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i P(\overrightarrow{F_i}) + \sum_i P(C_i)$

5.4 Cas des solides déformables