ELM1 | Électromagnétisme

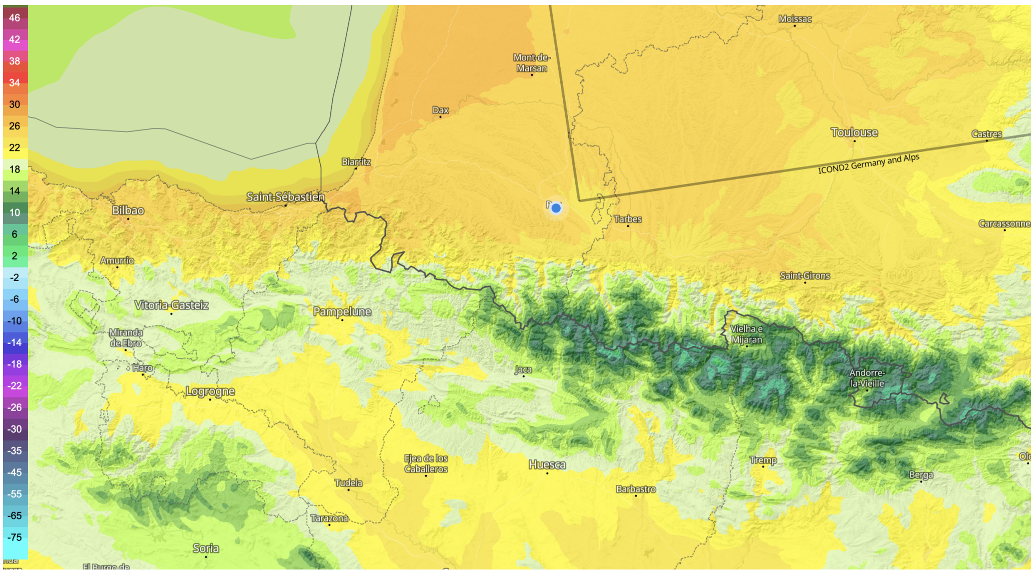
Action du champ magnétique sur un conducteur

Prérequis

- Système mécanique, énergie mécanique, énergie cinétique, énergie potentielle — Lycée et prépa
- Notion d'énergie thermique Q — Lycée
- Système thermodynamique, équilibre mécanique, équilibre thermique, équilibre thermodynamique — T1
- Modèle du gaz parfait et la phase condensée idéale — T1
- Énergie interne U et enthalpie H — T1
- Capacité thermique à volume constant C_V et à pression constant C_P — T1

I Notion de champ et champ magnétique

I.A Champ d'une quantité scalaire (exemple : $T = T(x, y, z)$)



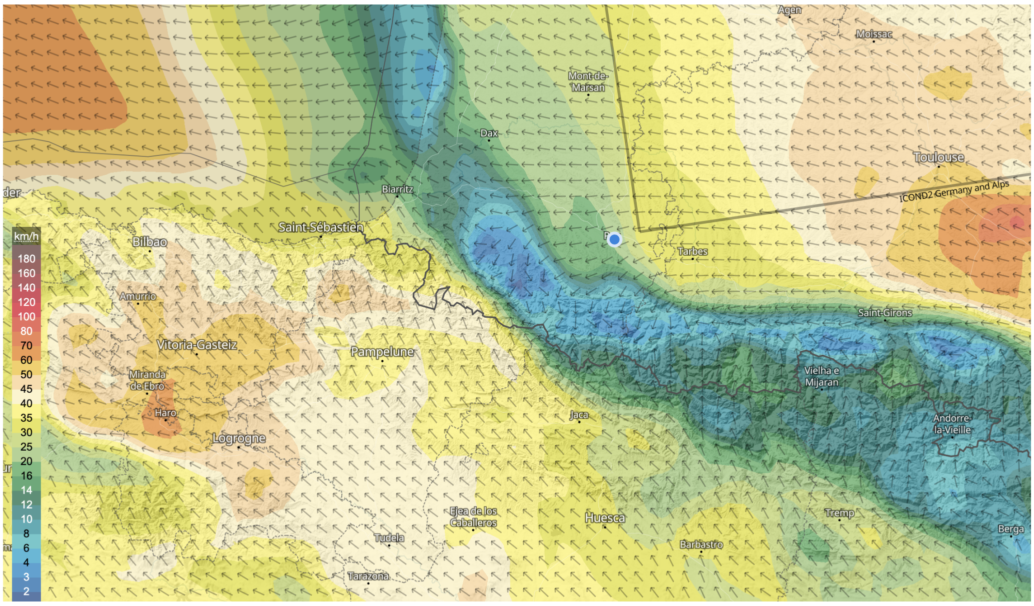
À connaitre

Définir un champ scalaire

Savoir-faire

Lire et représenter un champ scalaire à l'aide des lignes iso

I.B Champ vectoriel (exemple : $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$)



À connaitre

Définir un champ vectoriel à partir des composantes du champ scalaire dans chaque direction.

Savoir-faire

Lire et interpréter une carte de champ : lignes iso, colorisation, direction et longueur des vecteurs.

I.C Exemple de champ vectoriel

À connaitre

Le champ électrique $\vec{E}$, le champ magnétique $\vec{B}$et le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$ sont des champs vectoriels qui pour source respectivement les charges électriques, les mouvements des charges électriques et les masses.

II Sources du champ magnétique

II.A À partir d'un aimant

À connaitre

Définition : ligne de courant. Les lignes de courant du champ magnétique ne se coupent jamais !

Savoir-faire

Représenter les lignes de courant autour d'un aimant (droit)

Savoir-faire

Traduire sous forme d'équation différentielle une situation de transformation quasi-statique

II.B Boucle de courant

À connaitre

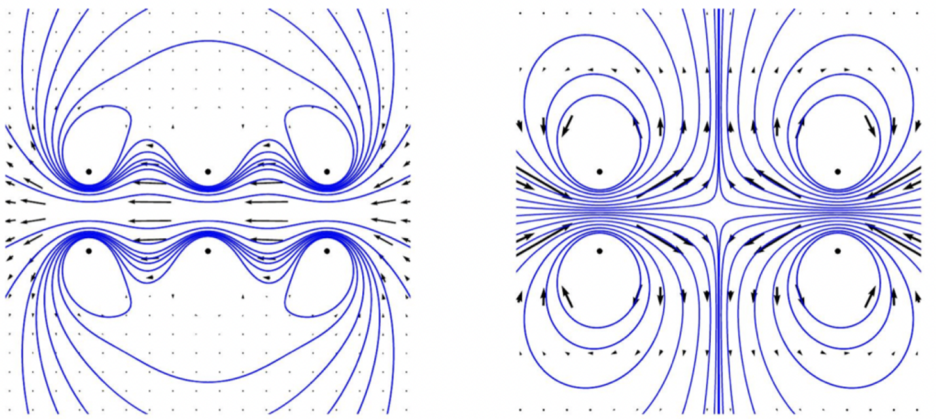
Équivalence aimant droit $\leftrightarrow$ spire de courant.

Savoir-faire

Utiliser la règle de la main droite pour déterminer la direction du champ : spire, fil infini, solénoïde.

Application 1 : lecture de champ magnétique

Énoncé Pour les deux cartes de champ vectoriel ci-dessous, déterminer :
1. la localisation des sources ;
2. le sens du courant ;
3. les zones de champ fort et faible ;
4. cas échéant s'il existe une zone de l'espace où le champ magnétique est uniforme.



Solution
1. Les sources sont localisées au centre des zones où le champ magnétique forme des boucles ;
2. Le sens du courant est donné par la règle de la main droite ;
3. Le champ est fort dans les zones où les lignes de champs se resserrent ;
4. Le champ est fort et uniforme dans les zones où les lignes de champ sont proches et parallèles.

II.C Moment magnétique

À connaitre

Moment magnétique d'une spire : $\vec{m} = i\vec{S} = iS\vec{n_{\text{ext}}}$ où $\vec{S}$ et $\vec{n_{\text{ext}}}$ sont orientés selon le courant.

Savoir-faire

Déterminer le moment magnétique d'une spire.

III Force de *Laplace*

III.A Force de *Laplace*

À connaitre

- force de Laplace sur un conducteur infinitésimal : $\mathrm{d}\overrightarrow{F} = i\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{ext}}$ où $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est orienté dans le sens du courant dans la spire ;
- force de la place sur un conducteur $\overrightarrow{F}_{\text{lap}} = \int_A^B i\,\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{ext}}$.

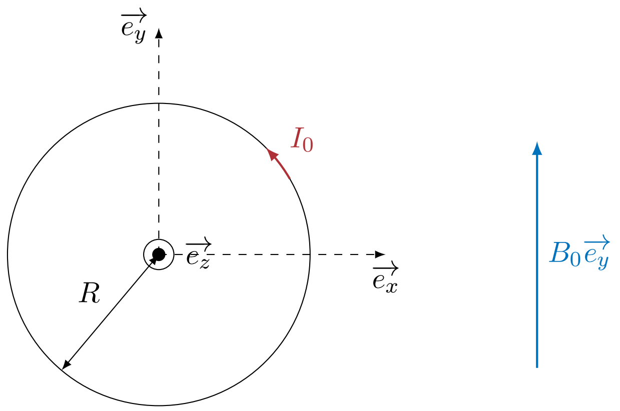
Savoir-faire

Déterminer l'expression des forces de Laplace sur un conducteur.

Remarque mathématique : ⚠ une intégrale scalaire et vectorielle ne sont pas égales : $\int_A^B \mathrm{d}\ell \neq \int_A^B \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$.

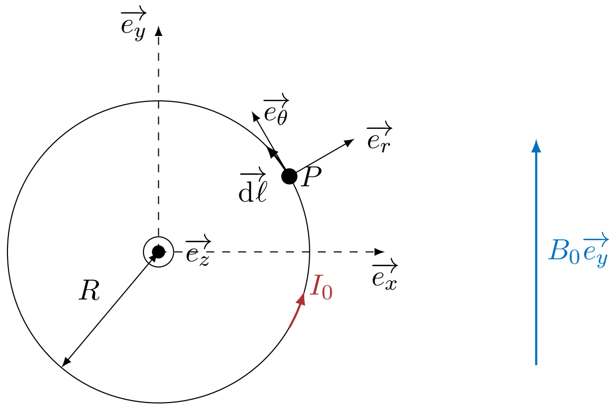
Application 2 : lecture de champ magnétique

Énoncé
Soit une spire circulaire de rayon R traversée par un courant I_0 constant. La spire est plongée dans un champ magnétique constant $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{e_y}$ comme sur la figure ci-dessous.



1 Montrer que l'action des forces de Laplace sur la spire est nulle.

Solution Nous intégrons sur un point P qui parcourt la spire de $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$. Au point P, le vecteur déplacement, en coordonnées polaires, s'écrit : $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = R\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta}$.



$$\overrightarrow{F}_{\text{lap}} = \int_0^{2\pi} I_0 R\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} \wedge B_0\overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{F}_{\text{lap}} = RI_0B_0\int_0^{2\pi} \overrightarrow{e_\theta} \wedge \overrightarrow{e_y}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\overrightarrow{F}_{\text{lap}} = RI_0B_0\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}_{\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y}} \wedge \overrightarrow{e_y}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\overrightarrow{F}_{\text{lap}} = RI_0B_0\overrightarrow{e_z}\int_0^{2\pi} -\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$\overrightarrow{F}_{\text{lap}} = 0$$

⚠ $\overrightarrow{e_\theta} \wedge \overrightarrow{e_y}$ dépend de θ, donc ne peut pas sortir de l'intégral.
L'action des forces de Laplace est nulle sur cette spire. Le résultat en se généralise pour toute spire fermée.

III.B Exemple du rail de *Laplace*

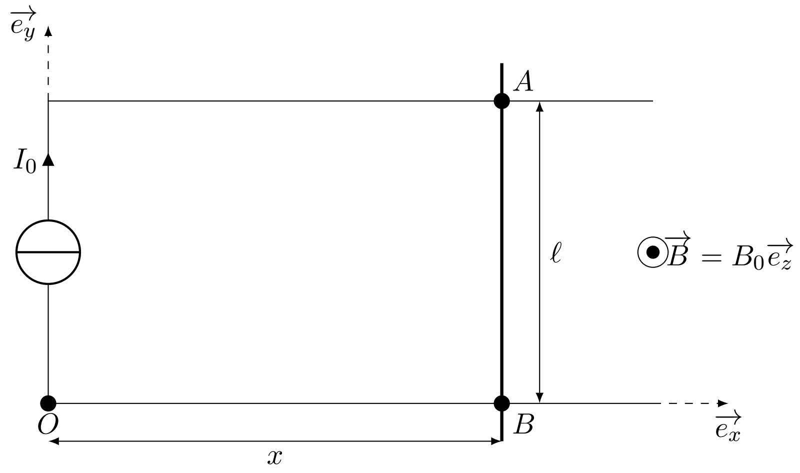
Savoir-faire

Déterminer l'équation du mouvement sur un conducteur électrique plongée dans un champ magnétique.

Application 3 : lecture de champ magnétique

Énoncé

Soit un rail de Laplace, constitué d'une tige conductrice de masse m, libre de translater dans la direction $\overrightarrow{e_x}$ traversée par un courant constant I_0. Le rail est plongé dans un champ magnétique constant $B_0\overrightarrow{e_z}$, comme représenté sur la figure ci-dessous.



(1) Déterminer l'équation différentielle sur la vitesse v de la tige conductrice.

Solution

(1)

- système : tige de masse m ;
- référentiel : terrestre, supposé galiléen ;
- BAME :
  - poids : $-mg\overrightarrow{e_z}$
  - réaction du rail : $\overrightarrow{R} = R\overrightarrow{e_z}$ en négligeant les frottements ;
  - action des forces de Laplace : $\overrightarrow{F}_{\text{lap}}$

$$\overrightarrow{F}_{\text{lap}} = \int_A^B I_0 \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge B_0\overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{F}_{\text{lap}} = I_0B_0 \int_0^{\ell} -\mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_z}$$
$$\overrightarrow{F}_{\text{lap}} = -I_0B_0\ell\overrightarrow{e_x}$$

Par application du principe fondamental de la dynamique en projection sur $\overrightarrow{e_x}$:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -I_0B_0\ell$$
$$v = -\frac{I_0B_0\ell}{m}t$$

où l'on a pris une vitesse initiale nulle pour l'intégration.
Remarque : si le moment magnétique s'oppose au champ magnétique extérieur, l'aire de la spire tend à diminuer.

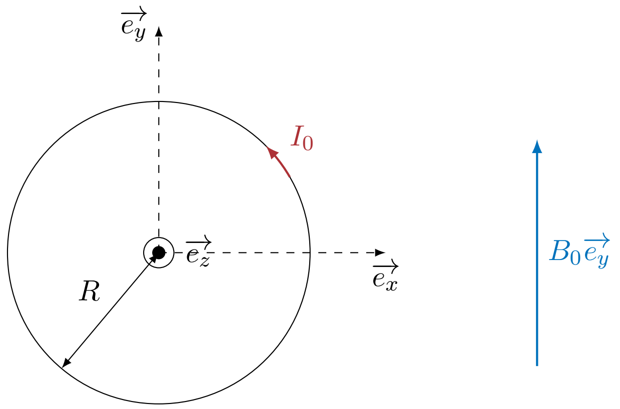
IV Moment des forces de Laplace

IV.A Étude de cas : spire

Application 4 : Calcul du moment des forces sur une spire circulaire

Énoncé

Nous poursuivons l'exemple de la spire circulaire plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}_{\text{ext}} = B_0\overrightarrow{e_y}$ constant. Nous rappelons que pour une spire fermée, la force de Laplace totale agissant sur la spire est nulle.



1 Déterminer la couple des forces de Laplace $\overrightarrow{C}$.
2 Montrer alors que $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{ext}}$
Données :

$$\int_0^{2\pi} \sin(\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi$$

Solution

1

Nous rappelons que ce n'est pas parce que la résultate est nulle que le moment est nul... (voir notion de couple).
Soit P un point de la spire repéré en coordonnées polaires, tel que $\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}\overrightarrow{OP} = R\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta}$

Le moment élémentaire des forces de Lapalce exercé sur un élément de la spire est alors :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}M_O(\overrightarrow{\mathrm{d}F}) &= \overrightarrow{OP} \wedge \left(I_0\,\mathrm{d}\overrightarrow{OP} \wedge B_0\overrightarrow{e_y}\right)\\
\mathrm{d}M_O(\overrightarrow{\mathrm{d}F}) &= I_0R^2B_0\overrightarrow{e_r} \wedge (\overrightarrow{e_\theta} \wedge \overrightarrow{e_y})\,\mathrm{d}\theta\\
\mathrm{d}M_O(\overrightarrow{\mathrm{d}F}) &= I_0R^2B_0\overrightarrow{e_r} \wedge \left(\underset{(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y})}{}\begin{pmatrix} -\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{e_y}\right)\mathrm{d}\theta\\
\mathrm{d}M_O(\overrightarrow{\mathrm{d}F}) &= I_0R^2B_0\overrightarrow{e_r} \wedge -\sin(\theta)\overrightarrow{e_z}\,\mathrm{d}\theta\\
\mathrm{d}M_O(\overrightarrow{\mathrm{d}F}) &= -I_0R^2B_0\sin(\theta)\underset{(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y})}{}\begin{pmatrix} \cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{e_z}\,\mathrm{d}\theta\\
\mathrm{d}M_O(\overrightarrow{\mathrm{d}F}) &= I_0R^2B_0\underset{(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y})}{}\begin{pmatrix} -\sin^2(\theta)\\ \cos(\theta)\sin(\theta)\end{pmatrix}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

⚠ Le produit vectoriel n'est pas associatif : $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$.
Pour obtenir le couple, nous intégrons sur le contour de la spire :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{C} &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}M_O(\overrightarrow{\mathrm{d}F})\\
\overrightarrow{C} &= -I_0R^2B_0\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_x}\\
\overrightarrow{C} &= -I_0R^2B_0\pi\overrightarrow{e_x}
\end{aligned}
$$

2
Le moment magnétique est : $\overrightarrow{m} = I_0\pi R^2\overrightarrow{e_z}$ et

$$\overrightarrow{m} \wedge B_0\overrightarrow{e_y} = -I_0\pi R^2B_0\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{C}$$

IV.B Moment des forces de Laplace

À connaitre

- Pour une spire, de moment magnétique $\overrightarrow{m}$, plongée dans un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B}_{\text{ext}}$, $\overrightarrow{C}_{\text{lap}} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{ext}}$;
- l'action du champ extérieur tend à aligner $\overrightarrow{m}$ avec $\overrightarrow{B}_{\text{ext}}$.

Savoir-faire

Déterminer le couple reçu par une spire de moment $\overrightarrow{m}$. Remarque : il ne faut pas calculer l'intégrale des forces de Laplace, mais utiliser la formule ci-dessus.

Application 5 : Cas de la boussole

Énoncé
Soit une boussole dont l'aiguille est assimilable à un aimant droit de moment magnétique $\overrightarrow{m}$,

libre de tourner autour de son centre. On note J le moment d'inertie de l'aiguille par rapport à l'axe (Oz).
Elle est plongée dans un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{e_x}$ avec $B_0 > 0$.
Tous les frottements sont négligés.
1 Rappeler l'expression du couple exercé par $\overrightarrow{B}$ sur l'aiguille.
2 Donner l'équation différentielle du mouvement sur l'angle θ. Donner la pulsation des petites oscillations (sans résoudre !).
3 Quelles sont les positions d'équilibre ? Laquelle est stable (répondre par une analyse qualitative) ?

Solution
1

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C} &= \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}\\ \overrightarrow{C} &= m\overrightarrow{e_r} \wedge B_0\overrightarrow{e_x}\\ \overrightarrow{C} &= -mB_0\sin(\theta)\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

2 Le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe $\overrightarrow{e_z}$ dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, donne :

$$\ddot{\theta} + \frac{mB_0}{J}\sin(\theta) = 0$$

Nous introduisons alors la pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mB_0}{J}}$
3 À l'équilibre $\sin(\theta_{\text{eq}}) = 0$
Position d'équilibre $\theta_{\text{eq}} = 0$ est stable car un petit écart ramène l'aiguille à sa position d'équilibre et la position $\theta_{\text{eq}} = \pi$ est instable car un petit écart l'éloigne vers une autre position d'équilibre.

Questions de révision

1. Définir un champ scalaire et donner un exemple.
2. Définir un champ vectoriel et expliquer comment le représenter.
3. Quelles sont les sources du champ magnétique ?
4. Comment déterminer la direction du champ magnétique autour d'une spire de courant à l'aide de la règle de la main droite ?
5. Quelle est l'expression du moment magnétique d'une spire ?
6. Écrire la formule de la force de Laplace sur un élément infinitésimal de conducteur.
7. Comment calculer la force totale de Laplace sur un conducteur ?
8. Quelle est l'expression du couple des forces de Laplace sur une spire ?
9. Comment le champ magnétique extérieur agit-il sur le moment magnétique d'une spire ?