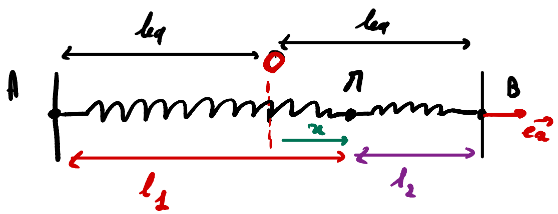
DS6 - Proposition de corrigé -

Exercice 1 voir application de cours T1.

Exercice 2 voir DS n°5

Exercice 3 - oscillateur mécanique

Q16



Pts : • l_{eq} (1) • pt Π position qq (1)
• pt O (1) • x (1)
• l_1 et l_2 (1)

Q17 Bilan des actions mécaniques :

• ressort R_1 : $\vec{F_1} = -k(l_1 - l_0)\vec{e_x}$

• ressort R_2 : $\vec{F_2} = -k(l_2 - l_0)(-\vec{e_x})$

(1)

• poids négligé • frottements négligés.

Q18 syst : Π de masse m
réf : terrestre galiléen

BAME : voir Q17

schéma : voir Q16

j'applique le Principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = -k(l_1 - l_0)\vec{e_x} + k(l_2 - l_0)\vec{e_x}$$

or $\begin{cases} l_1 = l_{eq} + x \\ l_2 = l_{eq} - x \end{cases}$ et $\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e_x}$ (mouvement uniquement selon x).

d'où en p/r $\vec{e_x}$

$$(a) \qquad m\ddot{x} = \underbrace{-k\cancel{l_{eq}} - kx + \cancel{kl_0}}_{R_1} + \underbrace{\cancel{kl_{eq}} - kx - \cancel{kl_0}}_{R_2}$$

Au final $\boxed{m\ddot{x} + 2kx = 0}$

Q19 Je reconnais l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique en amont sans second membre :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$$

d'où $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}}$

Q20 Les solutions sont donc de la forme

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \quad \text{où } (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

$x(t=0) = x_0 = A$

$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$\dot{x}(t=0) = B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$

car pas de vitesse initiale

d'où $\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)}$

Q21 On reprend les questions précédentes en ajoutant la force de frottement

$$\vec{f} = -\mu \vec{v} = -\mu \dot{x} \vec{e_x}$$

d'où $m\ddot{x} = -\mu\dot{x} - 2kx$ dans (e)

devient $\boxed{m\ddot{x} + \mu\dot{x} + 2kx = 0}$

Q22 Je reconnais une équation différentielle harmonique amortie, dont les solutions oscillent ssi l'équation caractéristique a un discriminant négatif.

(E.C.) $m r^2 + \mu r + 2k = 0$

$\Delta = \mu^2 - 4km < 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\mu < 2\sqrt{km}}$

Q23 La forme des solutions est alors

$$x(t) = \{A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\}\exp(-\lambda t)$$

avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et λ, Ω la partie réelle et imaginaire des solutions de (E.C).

$$r_{1,2} = \frac{-\mu}{2m} \pm \frac{i}{2m}\sqrt{\underbrace{4km - \mu^2}_{-\Delta}}$$

$$= \underbrace{-\frac{\mu}{2m}}_{\lambda} \pm \underbrace{\frac{i}{2}\sqrt{4\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{m^2}}}_{\Omega}$$

Q24 $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ or $\Omega = \dfrac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \lambda^2}$

d'où $\boxed{T = \dfrac{4\pi}{\sqrt{4\omega_0^2 - \lambda^2}}}$

$[\omega_0] = \text{rad}.s^{-1}$ preuve : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$[F] = [k][x]$

$[F] = N = kg.m.s^{-2}$

d'où $[k] = kg.s^{-2}$ d'où $\boxed{[\omega_0] = s^{-1}}$

Si notre calcul de T est correct $[h] = rad.s^{-1}$

preuve : $[h] = \left[\frac{\nu}{m}\right]$

or $[F] = [\nu][v]$ d'où $[\nu] = \frac{kg\ \cancel{m}.s^{-\cancel{2}\,-1}}{\cancel{m}.\cancel{s^{-1}}}$

d'où $[h] = \frac{\cancel{kg}\ s^{-1}}{\cancel{kg}} = s^{-1}$ ok !

$\boxed{Q25}$ Difficile.

$$T = \frac{4\pi}{\sqrt{4\omega_0^2 - h^2}} = \frac{4\pi}{2\omega_0\sqrt{1 - \frac{h^2}{4\omega_0^2}}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{4\omega_0^2}}}$$

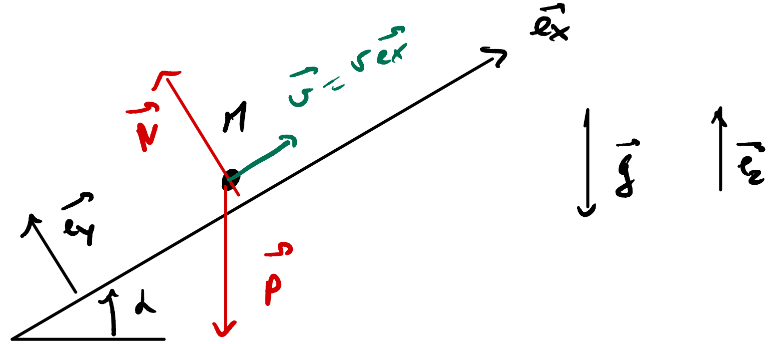
$T = T_0$ ssi $\sqrt{1 - \frac{h^2}{4\omega_0^2}} \simeq 1$

c'est à dire si $h^2 << 4\omega_0^2$

$\Leftrightarrow \boxed{h << \omega_0}$

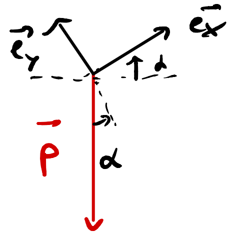
Exercice 4 - Saut à ski

$\boxed{Q26}$



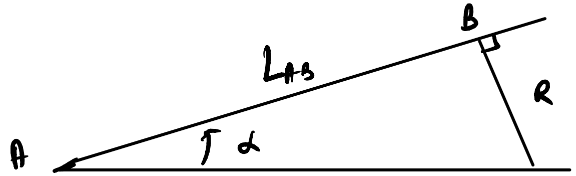
Syst : skieur, supposé ponctuel en M, de masse m.

BAME : • poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z} = mg \left| \begin{array}{l} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{array}\right.$ $(\vec{e_x},\vec{e_y})$



• réaction de la piste $\vec{N} = N\vec{e_y}$

$\boxed{Q27}$ $W_{AB}(\vec{P}) = m\vec{g}\cdot\vec{AB} = -mg\sin(\alpha)\,L_{AB}$



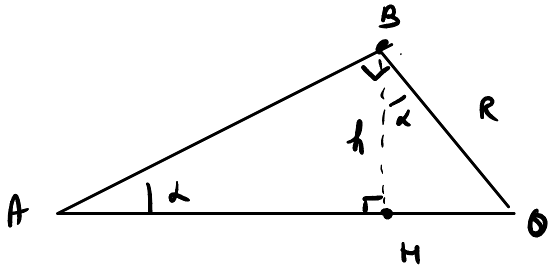
$\tan(\alpha) = \frac{R}{L_{AB}}$

d'où $W_{AB}(\vec{P}) = -mg\sin(\alpha)\,\dfrac{R}{\tan(\alpha)} = -mgR\cos(\alpha)$

$$\boxed{W_{AB}(\vec{P}) = -mgR\cos(\alpha)}$$

Autre méthode

$$W_{AB}(\vec{P}) = m\vec{g}\cdot\vec{AB} = m\vec{g}\cdot(\vec{AH}+\vec{HB})$$



car $\vec{g}$ et $\vec{HB}$ sont opposés.

$$W_{AB}(\vec{P}) = \underbrace{m\vec{g}\cdot\vec{AH}}_{0 \text{ car } \vec{g} \perp \text{ à } \vec{AH}} + m\vec{g}\cdot\vec{HB} = -mgh = -mgR\cos(\alpha)$$

et $\cos(\alpha) = \dfrac{h}{R} \Rightarrow h = R\cos(\alpha)$

$\boxed{Q28}$

$$\Delta_{AB} E_c = W_{AB}(\vec{P}) + \underbrace{W_{AB}(\vec{N})}_{0}$$

car $\vec{N} \perp$ à $\vec{AB}$.

$$E_c(B) - E_c(A) = -mgR\cos(\alpha)$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}\,v_B^2 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}\,v_A^2 = -\cancel{m}g\,2R\cos(\alpha)$$

$$\boxed{V_B = \sqrt{v_A^2 - 2gR\cos(\alpha)}}$$

$\boxed{Q29}$ V_B existe ssi le terme sous la racine est positif.

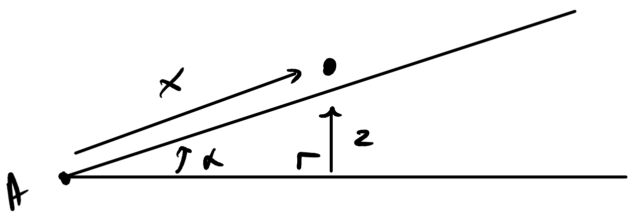
$$V_A^2 - 2gR\cos(\alpha) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad V_A > \sqrt{2gR\cos(\alpha)}$$

$$V_A > V_{A,lim}$$

avec $\boxed{V_{A,lim} = \sqrt{2gR\cos(\alpha)}}$

$\boxed{Q30}$



$\sin(\alpha) = \frac{z}{x} \iff \boxed{z = \sin(\alpha)\, x}$

Q31

TEM. $\frac{dE_m}{dt} = \sum_i P(\vec{F}_{nc_i})$

La seule force non conservative est $\vec{N}$, mais sa puissance est nulle car elle ne travaille pas.

d'où $\frac{dE_m}{dt} = 0$

$E_m = E_c + E_p$ avec $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$\int_A^x dE_p = -\int_A^x \delta W(\vec{P})$

avec $\delta W(\vec{P}) = m\vec{g} \cdot \vec{dl}$ or $\vec{dl} = dx\,\vec{e_x}$

$E_p(x) - \cancel{E_p(A)} = -\int_0^x -mg \sin(\alpha)\, dx = mg \sin(\alpha)\, x$

$\cancel{E_p(A)} \to 0$ posé par le sujet

d'où $E_p(x) = mg \sin(\alpha)\, x$.

au final

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mg \sin(\alpha)\, x = c^{ste}}$$

Q32

$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d\dot{x}^2}{dt} + mg \sin(\alpha) \frac{dx}{dt} = 0$

dérivée de fct° composée

$\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{m}\, \cancel{2} \cancel{\dot{x}}\, \ddot{x} + \cancel{m} g \sin(\alpha) \cancel{\dot{x}} = 0$

la solut° $\dot{x} = 0$ n'est pas une solution physique

d'où $\ddot{x} + g \sin(\alpha) = 0$

j'intègre

$\dot{x} = -g \sin(\alpha)\, t + c^{ste}$

$\dot{x}(t=0) = v_A = c^{ste}$

d'où $\boxed{\dot{x}(t) = -g \sin(\alpha)\, t + v_A}$

Q33

Quand le skieur est en B, $t = \tau$

et $\dot{x} = v_B$

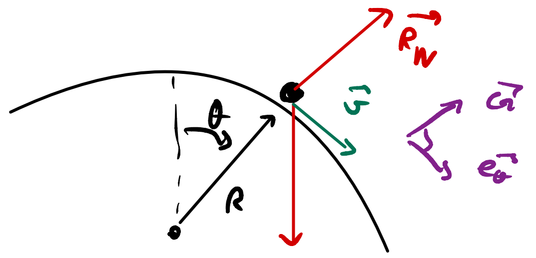
d'où $v_B = -g \sin(\alpha)\, \tau + v_A$

$\iff \tau = \frac{v_A - v_B}{g \sin(\alpha)}$

Avec le résultat de la Q28

$$\boxed{\tau = \frac{v_A - \sqrt{v_A^2 - 2g R \cos \alpha}}{g \sin(\alpha)}}$$

Partie 2 : mouvement entre B et C.



Q34 syst : skieur base : polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.

BAME : • poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg \left| \begin{matrix} -\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{matrix} \right._{pol}$

• réaction de la piste : $\vec{R_N} = R_N \vec{e_r}$

• frottements négligés.

Q35 J'applique le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R_N}$$

projetons l'accélération dans la base polaire

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \quad \text{car } R = c^{ste}$$

d'où $\vec{a} = R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}$

projection du PFD dans la base polaire

p/r $\vec{e_r}$: $-mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos(\theta) + R_N$

p/r $\vec{e_\theta}$: $mR\ddot{\theta} = mg\sin(\theta)$

d'où $\boxed{R_N = mg\cos(\theta) - mR\dot{\theta}^2}$

Q36 Au point D, le skieur quitte la piste, la réaction de celle-ci sur le skieur est donc nulle $R_N = 0$

$$g\cos(\theta_D) = R\dot{\theta}_D^2$$

or $v_D = R\dot{\theta}_D$ d'où $\dot{\theta}_D^2 = v_D^2/R^2$

$v_D^2 = gR\cos(\theta_0) \Rightarrow \boxed{v_D = \sqrt{gR\cos\theta_0}}$

$v_D > 0$, on ne garde que la racine positive.

Q37 $E_c = \frac{1}{2} m v_D^2$

$E_p = \,?$

$dE_p = -\delta w(\vec{P}) = -m\vec{g}\cdot\vec{dl}$

$\vec{dl} = R\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

d'où $dE_p = -mg\sin(\theta)\,R\,d\theta$

j'intègre

$E_p = mgR\cos(\theta) + c^{ste}$

$E_p(\theta = \pi/2) = 0$ (même niveau que A).

$\Rightarrow c^{ste} = 0$

d'où $\boxed{E_p = mgR\cos(\theta)}$

$E_m = E_c + E_p$

d'où $\boxed{E_m(D) = \frac{1}{2} m v_D^2 + mgR\cos(\theta_D)}$

Q38 TEM intégral.

$\Delta E_m = 0 \leftarrow$ $\vec{R_N}$ ne travaille pas entre AB ni entre B et D.

d'où $E_m(D) = E_m(A)$

$\frac{1}{2}\cancel{m}v_D^2 + \cancel{m}gR\cos(\theta_D) = \frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2$

d'où $\boxed{v_D^2 = v_A^2 - 2gR\cos(\theta_D)}$

Q39 d'après le résultat de la Q36

$gR\cos(\theta_0) = v_A^2 - 2gR\cos(\theta_0)$

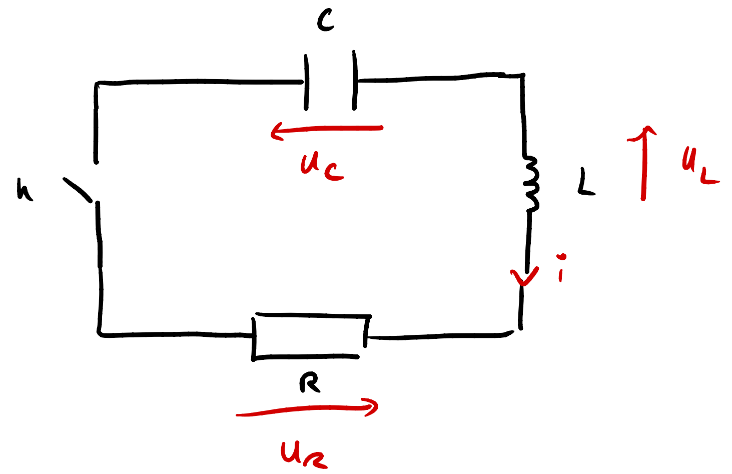
$$\cos(\theta_D) = \frac{v_A^2}{3gR}$$

$$\boxed{\theta_D = \arccos\left(\frac{v_A^2}{3gR}\right)}$$

__Homogénéité ?__ $\dfrac{\cancel{m^2} \cdot \cancel{s^{-2}}}{\cancel{m} \cdot \cancel{s^{-2}} \, \cancel{m}}$ ok.

__Exercice 5 :__

$\boxed{40}$



$\boxed{41}$ Loi des mailles

$$0 = u_C + u_L + u_R$$

$$u_R = Ri$$

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

$$0 = u_C + L\frac{di}{dt} + Ri$$

$$i = C\frac{du_C}{dt}$$

$$0 = u_C + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt}$$

Sous forme canonique

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0}$$

On pose $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ la pulsation propre

et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \iff Q = \omega_0 \frac{L}{R}$

$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$ le facteur de qualité

42 ▪ Soit l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \quad (E.C)$$

▪ si $Q > \frac{1}{2}$, régime pseudo-périodique

$$\boxed{u_c(t) = \left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]\exp(\mu t)}$$

où $\begin{cases} \Omega \text{ est la partie imaginaire des solutions de (E.C)} \\ \mu \text{ ——— réelle ———} \\ A, B \text{ des constantes d'intégration.} \end{cases}$

▪ Si $Q = \frac{1}{2}$, régime critique

$$u_c(t) = (At + B)\exp(r_0 t)$$

$\begin{cases} A, B \in \mathbb{R} \\ r_0 \text{ la solution double de (EC).} \end{cases}$

▪ Si $Q < \frac{1}{2}$, régime apériodique

$$u_c(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t)$$

avec $\begin{cases} A, B \in \mathbb{R}^2 \\ r_1, r_2 \text{ les solutions de (E.C).} \end{cases}$

Q43 à $t = 0$, $u_c(0^-) = U_0$ (sujet)

or la tension aux bornes d'un condensateur est continue, donc $u_c(0^+) = u_c(0^-) = U_0$.

$$\boxed{u_c(0) = U_0}$$ condition 1

$i(0^-) = 0$, car l'interrupteur est ouvert.

on $i(0^+) = i(0^-)$ car i traverse une bobine, donc $i(0^+) = 0$

$\boxed{i(0) = 0}$ 2e condition

(qu'on pourra utiliser sous la forme $i = c\frac{du_c}{dt}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dot{u}_c(0) = 0.}$

$\boxed{44}$ d'après la LM.

$$u_c + u_L + u_R = 0 \quad \times i$$

$$u_c i + u_L i + u_R i = 0$$

$$u_c i + u_L i = -u_R i$$

$$u_c c\frac{du_c}{dt} + u_L L\frac{di}{dt} = -u_R i$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}cu_c^2}_{\mathcal{E}_c} + \underbrace{\frac{1}{2}Li^2}_{\mathcal{E}_L}\right) = -Ri^2}$$

$$\mathcal{E}_{tot,stockée} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_L$$

$\boxed{\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_{tot,stockée}) \leq 0}$, donc

$\mathcal{E}_{tot\,stockée} \searrow$ au cours du temps.

En effet, la résistance va dissiper de l'énergie par effet Joule, donc l'énergie stockée dans un système électrique décroît au cours du temps.