TD M5 | Mécanique

Rotation autour d'un axe fixe

exercice sera corrigé en TD ;
exercice classique / important ; à maîtriser pour les concours ;
niveau de difficulté de l'exercice.

Parcours d'entrainement :

Je suis à l'aise avec le chapitre	Toute la fiche
Je ne suis pas à l'aise	Cahier d'entrainement et Exercices 1 et 2

Les exercices issus du *cahier d'entrainement* sont à retrouver :

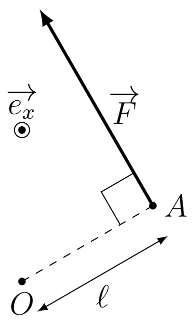
Vous pouvez l'utiliser pour faire la section 13 sauf les exercices 13.7 / 13.8 et 13.9 qui sont hors programme en TSI.

Exercice 1 : Calculs de moment

Dans tous les cas suivants $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{u}$, où F est la norme de la force et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire dans la direction.

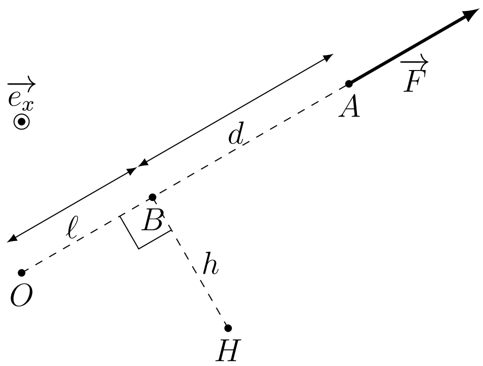
Les angles sont tous pris positifs.

Cas 1



1. Déterminer le moment sur l'axe $(A, \overrightarrow{e_x})$
2. Déterminer le moment sur l'axe $(O, \overrightarrow{e_x})$
3. Interpréter vos résultats.

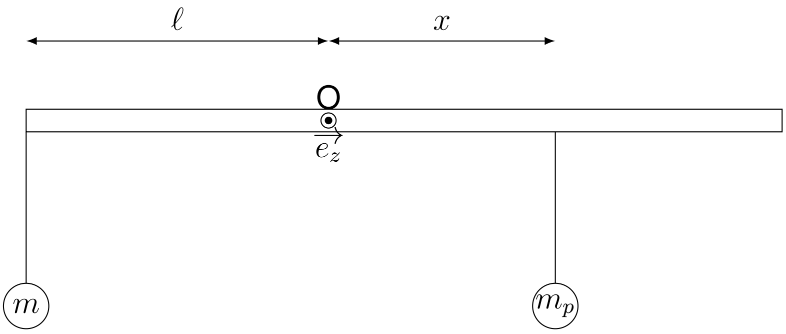
Cas 2



4 Déterminer le moment sur l'axe $(B, \overrightarrow{e_x})$.
5 Déterminer le moment sur l'axe $(O, \overrightarrow{e_x})$.
6 Déterminer le moment sur l'axe $(H, \overrightarrow{e_x})$.
7 Interpréter vos résultats.

Exercice 2 : Balance

Soit une balance composée d'un axe la laissant libre de tourner autour d'un axe $(O, \overrightarrow{e_z})$. On place à l'extrémité gauche une masse inconnue m, et de l'autre côté, nous pouvons déplacer d'une distance x la masse marquée m_p.



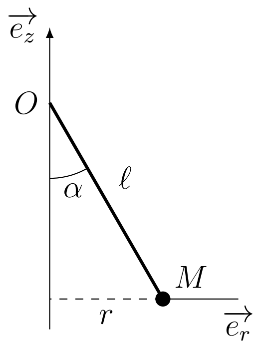
1 Dans la situation représentée, justifier sans calcul, quelle masse est la plus lourde.
2 Exprimer m la masse recherchée en fonction de ℓ, x et m_p.
3 Expliquer comment fonctionne cette balance.

Exercice 3 : Équilibre de rotation

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur ℓ attaché en un point O fixe d'un axe (Oz). Le point matériel M est astreint à tourner autour de (Oz), à la vitesse angulaire constante ω dans le référentiel galiléen d'étude.

Nous donnons le moment cinétique en O du point M : $\overrightarrow{L_0}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)$.

1 En appliquant la loi du moment cinétique en un point astucieusement choisi, déterminer l'angle d'inclinaison constant α du pendule avec l'axe (Oz) en fonction de ℓ, g et ω.



Exercice 4 : Pendule de torsion

Un pendule est formé d'une tige OA de longueur ℓ, de masse m et de moment d'inertie $J = \dfrac{1}{3}m\ell^2$ par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_x})$.

La tige est fixée en O par un ressort de torsion de couple de rappel $M_x = -k\theta$ où θ est la position angulaire de la tige entre l'axe vertical vers le haut et la tige.

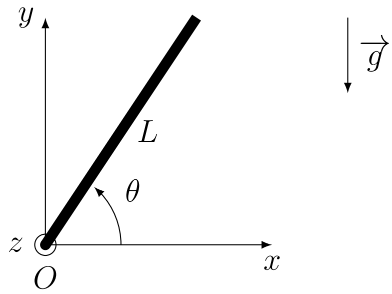
On néglige les frottements.

1. Faire un schéma. Quelle précaution doit-on prendre sur la représentation de θ ?
2. Déterminer l'unité de la constante k.
3. Établir l'équation du mouvement de la tige grâce à la loi du moment cinétique.
4. En déduire l'équation du mouvement dans le cas des petits angles. À quelle condition, portant sur m, ℓ, k et g, l'équation différentielle précédente est celle d'un oscillateur harmonique ?
5. Hors du cas particulier des petits angles, déterminer les positions d'équilibre possible pour $\theta \in [-\pi, \pi[$. Faire une résolution graphique. À quelle condition existe-t-il trois positions d'équilibre ?

Exercice 5 : Chute d'un arbre

M. Melzanni

On étudie la chute d'un arbre : on souhaite connaître la durée que met l'arbre, une fois tranché à sa base, pour tomber au sol.



On modélise la situation par une tige homogène de hauteur $L = 10\,\text{m}$ et de masse m, reliée au sol par une liaison pivot parfaite, et qui part d'un angle initial $\theta_0 = 0,9\frac{\pi}{2}$.

Données : le moment d'inertie par rapport à Oz : $J = \frac{1}{3}mL^2$

1 Donner les expressions des énergies cinétique et potentielle de pesanteur de l'arbre en fonction de m, L, θ et $\dot{\theta}$

2 Justifier pourquoi E_c+E_p est constante au cours du mouvement. Exprimer cette constante en utilisant les conditions initiales.

3 En déduire la relation :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{3g}{L}}\sqrt{\sin(\theta_0) - \sin(\theta)}$$

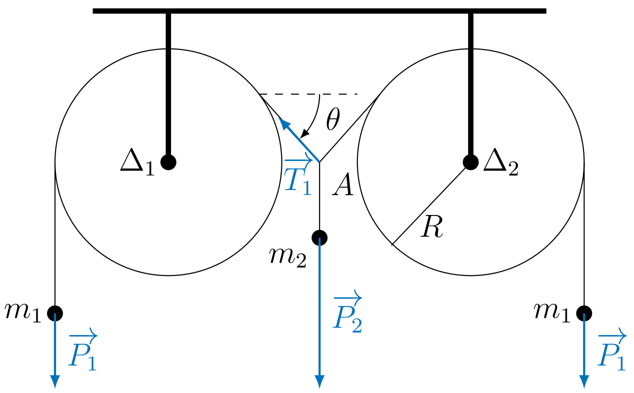
4 Pour exprimer la durée T de la chute, isoler dt dans l'expression précédente puis l'intégrer entre $\theta = \theta(t=0)$ et $\theta = \theta(t_f)$. Puis faire l'A.N.

On donne le résultat numérique : $\int\limits_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} = 4,315.$

Exercice 6 : Double poulie

E. Thibierge

On s'intéresse au dispositif ci-contre, à l'équilibre et dans un plan. Les deux poulies sont identiques, de même rayon R et masse m_0, et les deux liaisons pivot avec le bâti sont modélisées par des liaisons parfaites : les frottements d'axe sont négligés.



Les fils sont également tous supposés idéaux, c'est-à-dire qu'ils sont inextensibles et de masse négligeable.

Enfin, on suppose que les fils ne glissent pas sur les poulies.

La force $\overrightarrow{P_1}$ est le poids de la masse m_1. La force $\overrightarrow{T_1}$ est exercée par le fil touchant la poulie d'axe Δ_1 sur le fil relié à la masse m_2.

Comme il s'agit d'une force de contact, son point d'application est le point d'attache A entre les deux fils.

1 Faire un bilan soigneux des actions mécaniques s'appliquant à la poulie 1. Pour chaque action mécanique, indiquer s'il s'agit d'une force ou d'un couple et préciser, s'il est possible de le déterminer, le moment de l'action mécanique par rapport à l'axe Δ_1.

2 Par application du théorème du moment cinétique à la poulie 1, montrer qu'en norme $T_1 = P_1 = m_1 g$.

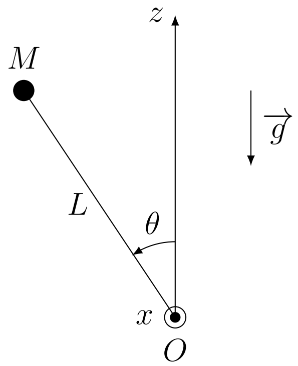
3 Caractériser l'action mécanique de liaison entre la poulie 1 et le bâti. Exprimer sa résultante R_1 et son moment en fonction de T_1, m_0, m_1 et g.

4 Déterminer l'angle θ et analyser qualitativement la vraisemblance du résultat (regarder notamment les cas $m_2 \ll m_1$ et $m_2 \gg m_1$).

Exercice 7 : Gravimètre de Holweck-Lejay

M. Melzanni et E. Thibierge

Instrument ancien, un gravimètre de Holweck–Lejay est constitué d'une tige de longueur L, libre de tourner autour d'un axe (Ox), au bout de laquelle est placée en M une masse m.



On note J_{Ox} le moment d'inertie par rapport à l'axe (Ox) de l'ensemble $\{tige + masse\}$, et on donne $J_{Ox} = mL^2$ (on a négligé la masse de la tige et on suppose ponctuelle la masse située au bout). La liaison pivot en O est supposée parfaite.

Par ailleurs, un ressort spirale, non représenté sur le dessin, tend à retenir la tige en position verticale en exerçant sur la tige un couple (c'est-à-dire un moment résultant, par rapport à l'axe (Ox)) $M_x = -C\theta$ autour de l'axe de rotation, avec $C > 0$ la constante de raideur du ressort. On admet que ce couple dérive de l'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$.

1 En utilisant le théorème du moment cinétique, établir l'équation du mouvement du pendule portant sur l'angle θ.

2 Montrer que les positions d'équilibre θ_E de la tige sont solution de l'équation

$$\sin(\theta_E) = \frac{C}{mgL}\theta_E$$

.

3 Puis justifier qu'il existe trois positions d'équilibre si $C/mgL < 1$ et une seule sinon (on pourra raisonner graphiquement, en traçant $y = sin\theta$ et $y = \frac{C}{mgL}\theta$).

On souhaite étudier la stabilité de la position d'équilibre en $\theta = 0$.

4 Pour cela, donner l'expression de l'énergie potentielle totale du système masse+tige+ressort en fonction de l'angle θ.

5 Puis démontrer que la position d'équilibre $\theta = 0$ n'est stable que si $C/mgL > 1$.

6 Intuitivement, que peut-on dire de la stabilité des positions d'équilibre en $\theta \neq 0$ dans le cas où $C/mgL < 1$?

7 Supposons que la raideur du ressort spirale soit telle que $C/mgL > 1$, et que les conditions initiales garantissent un mouvement de faible amplitude. Déterminer la période des oscillations en termes de $g_0 = C/mL$ et expliquer l'utilisation de l'appareil en gravimètre, c'est-à-dire comme appareil de mesure des variations de g.

Exercice 8 : Pendule avec deux ressorts

d'après M. Melzanni

On considère un pendule pesant constitué par une tige homogène, de masse m, longueur L, et moment d'inertie par rapport à l'axe Oz donné par $J_{Oz} = \frac{1}{3}mL^2$.

Son extrémité en M est attachée à deux ressorts identiques, de raideur k et longueur à vide ℓ_0. Ils sont fixés à des points A et B, la longueur AB étant égale à $2\ell_0$, si bien qu'à l'équilibre le point M est au milieu du segment $[AB]$.

On fera l'hypothèse des faibles angles et on supposera que les ressorts restent toujours horizontaux.

On définit θ comme l'angle entre la verticale descendante et la tige.

1 Donner l'expression du moment cinétique de la tige projeté sur l'axe Oz, en fonction de J_{0z} et de $\dot{\theta}$. Énoncer ensuite le théorème du moment cinétique.

2 Utiliser la question précédente pour établir l'équation du mouvement. Puis la résoudre et donner l'expression de la pulsation ω_0 des oscillations.