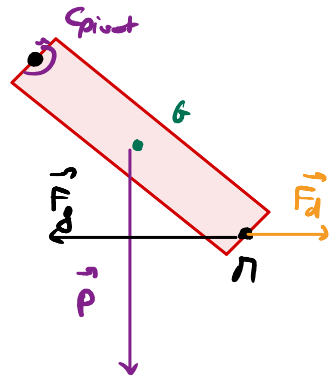
Exercice 4

système : tige de mont d'inertie J_{Oz}, de masse m de longueur L.

réf : laboratoire, galiléen.

BAME : poids : $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$

pivot : $C_{pivot} = 0$ car pivot parfaite



ressort gauche : $\vec{F_g} = -k(l_1 - l_0)\vec{e_x}$

ressort de droite $\vec{F_d} = -k(l_2 - l_0) - \vec{e_x}$

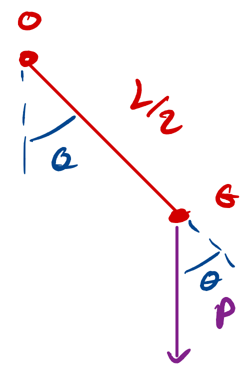
$\vec{F_d} = k(l_2 - l_0)\vec{e_x}$

1 moment cinétique $\boxed{L_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta}}$ $L_{Oz} = \frac{1}{3} m L^2 \dot{\theta}$

TMC $\boxed{\frac{dL_{Oz}}{dt} = \frac{1}{3} m L^2 \ddot{\theta} = \sum_i M_{Oz}(\vec{F_i})}$

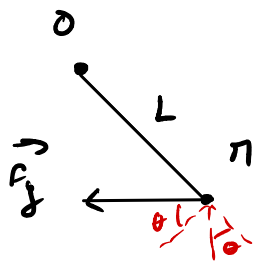
2 Il faut calculer les moments de toutes les forces

- poids $M_{Oz}(\vec{P}) = -mg\frac{L}{2}\sin(\theta)$

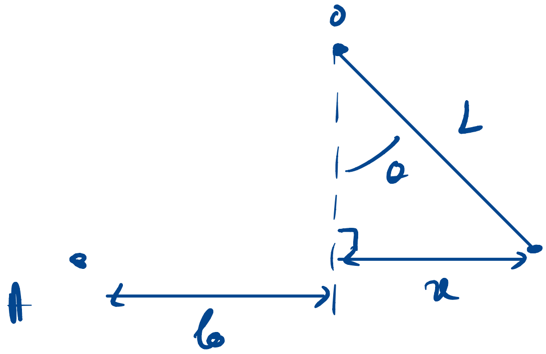


- ressort gauche : $M_{Oz}(\vec{F_g}) = -Lk(l_1 - l_0)\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}_{\cos(\theta)}$

$= -Lk(l_1 - l_0)\cos(\theta)$



de plus



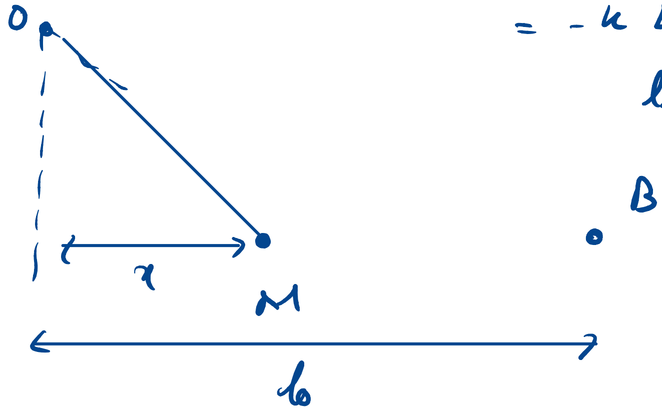
$$\begin{cases} l_1 = l_0 + x \\ x = L\sin(\theta) \end{cases}$$

d'où $\quad M_{Oz}(\vec{F_g}) = -L\,k\,x\cos\theta = -L^2 k \sin(\theta)\cos(\theta)$

• <u>ressort de droite</u> $\quad \vec{F_d} = k(l_2 - l_0)\,\vec{e_x} = -k\,x\,\vec{e_x}$

$$= -k\,L\sin(\theta)\,\vec{e_x}$$

$$l_2 = l_0 - x$$



Donc, idem que le moment précédent, $\quad M_{Oz}(\vec{F_d}) = -kL^2\sin(\theta)\cos(\theta)$

d'où le TMC :

$$\frac{1}{3}\cancel{m}\cancel{L^2}\,\ddot{\theta} = -\cancel{m}g\,\frac{\cancel{L}}{2L}\sin(\theta) - 2\,\frac{k\cancel{L^2}}{m}\sin(\theta)\cos(\theta)$$

petits angles

$$\boxed{\ddot{\theta} + 3\left(\frac{g}{2L} + \frac{2k}{m}\cos(\theta)\right)\sin(\theta) = 0}$$

Approx. petits angles

$$\boxed{\ddot{\theta} + 3\left(\frac{g}{2L} + \frac{2k}{m}\right)\theta = 0}$$

Je reconnait une équation différentielle d'ordre 2, dont la solution est

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \quad , \left\{ \begin{array}{l} (A, B) \in \mathbb{R}^2 \\ \omega_0 = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{g}{2L} + \frac{2k}{m} \right)} \end{array} \right.$$

Pour déterminer (A, B), il nous faut les CI.