

Exercice 3

système: {masse + tige} de moment d'inertie en O_2 $J_{O_2} = mL^2$

réf: le laboratoire, galiléen.

BANF: • poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_2$ (masse de la tige négligeable).
• couple résistant: $\Pi_\alpha = -C\theta$
• Réaction du pivot: $\vec{R} = -R\vec{e}_1$

TORC:
$$\frac{d}{dt}(J_{O_2} \omega) = \sum_i \Pi_{O_2}(\vec{F}_i)$$
$$J_{O_2} \omega^2 = \Pi_{O_2}(\vec{P}) + \Pi_\alpha + \Pi_{O_2}(\vec{R})$$

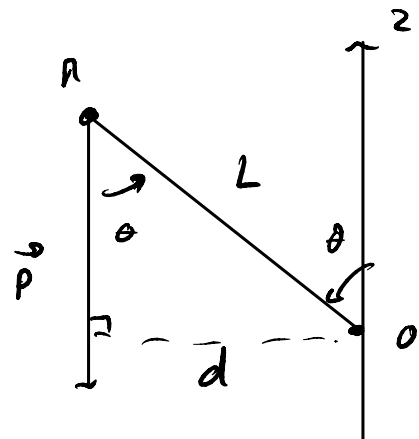
Calculons les moments des forces

• $\Pi_{O_2}(\vec{P}) = +d mg$

on $\sin(\theta) = \frac{d}{L}$

d'où $\Pi_{O_2}(\vec{P}) = mg L \sin \theta$

• $\Pi_{O_2}(\vec{R}) = 0$ car la droite support de $\vec{R}$ passe par l'axe O_2 .



d'où
$$J_{O_2} \ddot{\theta} = mg L \sin(\theta) - C\theta \quad (*)$$

2 À l'équilibre $\theta = \theta_E = c^{ste}$ donc $\dot{\theta}_E = 0$ et $\ddot{\theta}_E = 0$

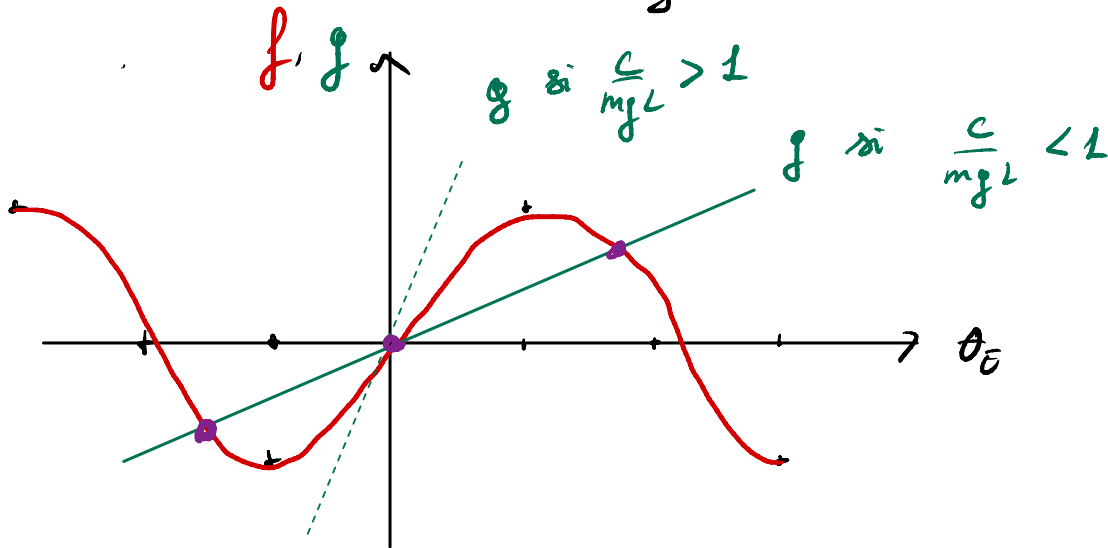
dans (*)
$$\sin(\theta_E) = \frac{C}{mgL} \theta_E$$

3 On a une équation de la forme

$$f(\theta_E) = g(\theta_E)$$

avec $f(\theta_E) = \sin(\theta_E)$

$$g(\theta_E) = \frac{c}{mgL} \theta_E$$



Si $\frac{c}{mgL} < 1$, il y a trois solutions :

$$\begin{cases} \theta_E = 0 \\ 2 \text{ valeurs symétriques} \end{cases}$$

Si $\frac{c}{mgL} > 1$, il y a une unique solution

$$\theta_E = 0$$

4 $E_{\text{tot}} = E_{\text{p}} + E_{\text{ressort}} + E_{\text{pivot}}$

ressort : $E_{\text{ressort}} = \frac{1}{2} c \theta^2$ (donnée)

pesant : $E_{\text{p}} = mgy = mgL \cos(\theta)$

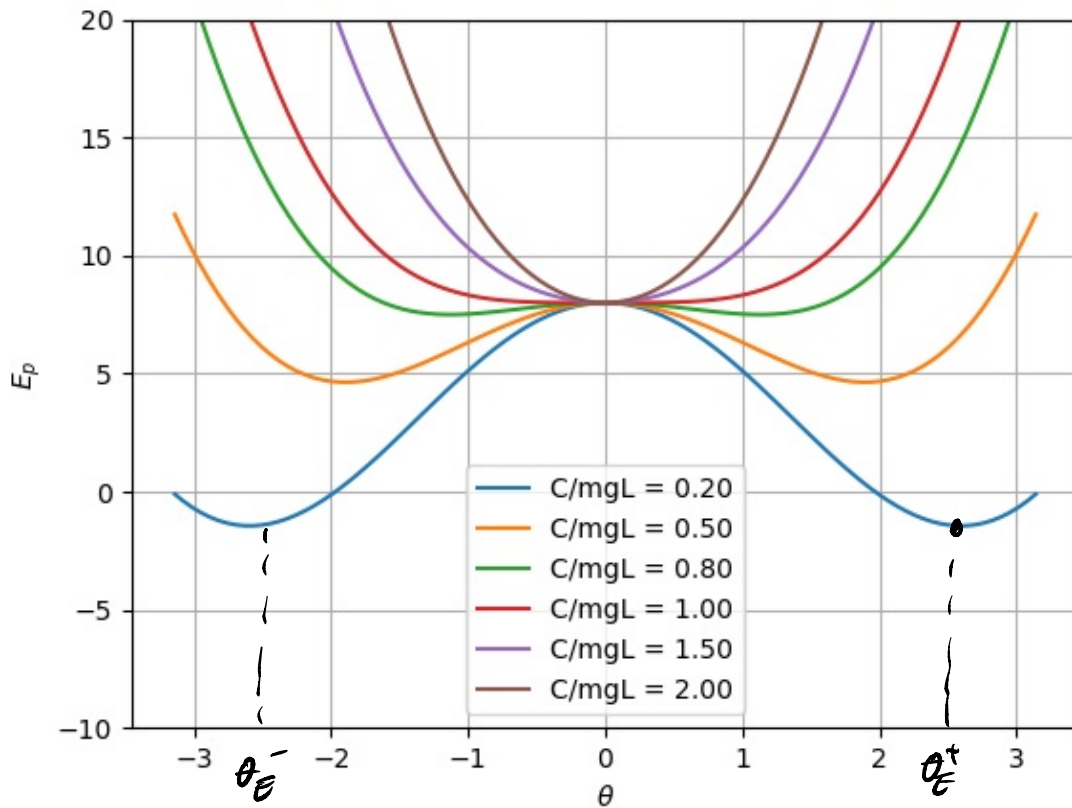
pivot : $P(\vec{R}) = 0$ car il n'y a pas de moment au pivot donc $E_{\text{pivot}} = 0$

Au final

$$E_{\text{pot}} = mgL \cos(\theta) + \frac{1}{2} C \theta^2$$

5

trace



Si $\frac{C}{mgL} > 1$, alors $\theta_E = 0$ est stable, car il s'agit d'un minimum

Si $\frac{C}{mgL} < 1$, alors $\theta_E = 0$ est instable car il s'agit d'un maximum

• alors θ_E^+ et θ_E^- sont des équilibres stables.

6 Si $\frac{C}{mgL} < 1$ $\Leftrightarrow C < mgL$

alors le couple n'est pas suffisant pour ramener la tige à $\theta_E = 0$, c'est les positions

$\theta \neq 0$ qui sont stables.

7 petites oscillations dans (2)

$$mL^2 \ddot{\theta} = \frac{mgL}{2} \theta - \frac{c}{mL^2} \theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{c}{mL^2} - \frac{g}{2} \right) \theta = 0$$

Je reconnais une équation différentielle d'ordre 2, dont les solutions sont :

$$\theta = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{avec } \omega_0^2 = \frac{c}{mL^2} - \frac{g}{2}$$

$$\text{d'fini si } \frac{c}{mL^2} - \frac{g}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow c > mgL \quad \text{ok!}$$

$$\text{d'où } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\left(\frac{c}{mL^2} - \frac{g}{2} \right)^{1/2}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi \sqrt{L}}{\left(\frac{c}{mL} - g \right)^{1/2}}$$

$$\swarrow \text{avec } g_0 = \frac{c}{mL}$$

$$T_0 = \frac{2\pi \sqrt{L}}{(g_0 - g)^{1/2}}$$

Ainsi la mesure de T_0 permet d'en déduire

$$g - g_0, \text{ or on connaît } g_0 = \frac{c}{m_L}$$

si $g \geq g_0$, cette méthode permet de déterminer précisément g -