



Mouvement conservatif 1D

Prérequis



Mécanique

M1 à M5



Énergie cinétique et énergie potentielle

CPGE

1 Cadre de l'étude

1.1 Mouvement conservatif



Mouvement conservatif : absence de terme dissipatif (frottement) :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \text{ donc } E_m = C^{\text{ste}} = E_{m,0}$$

1.2 Degré de liberté

Mouvement uniquement selon une coordonnée u : $\vec{u} = u\vec{e}_u$.

1.3 Bilan des force

$\vec{F} = F(u)\vec{e}_u$ rassemble toutes les forces. Elle dérive d'un potentiel car le système est conservatif. Donc $F = -\frac{dE_p}{du}$



$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$$



$$\overrightarrow{\text{grad}}(\cdot) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) \\ \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\cdot) \end{pmatrix}$$

2 Graphique E_p

 $E_p(u)$ se détermine par le calcul ou est donnée par le sujet $E_p(u) \leq E_{m,0}$ donne si le mouvement est borné ou non, si le mouvement est périodique, les zones inatteignables. $E_p(u) = E_{m,0}$: points où la vitesse est nulle

3 Positions d'équilibre

Positions d'équilibre : tangente horizontale $\Leftrightarrow \frac{dE_p}{du} = 0$ 

Si la position d'équilibre est un minimum, la position est stable.

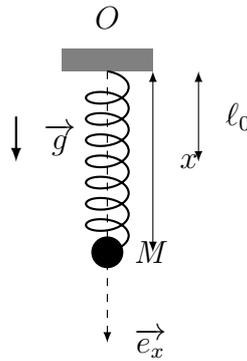


Si la position d'équilibre est un maximum, la position est instable.

4 Exemples : système masse-ressort vertical

Application 1 : Freinage d'une route

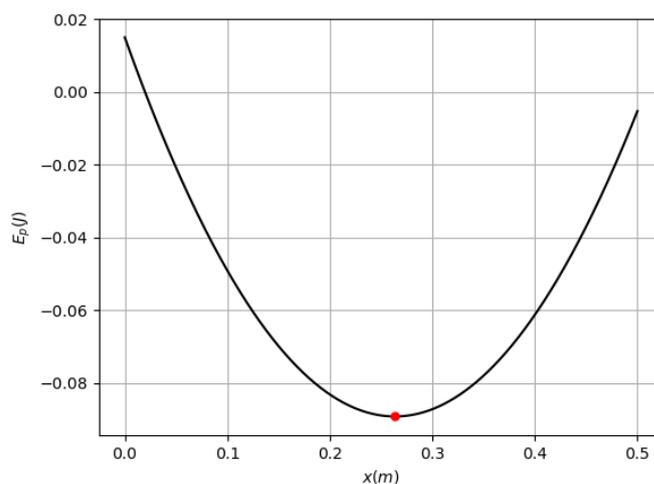
Énoncé Soit une masse m accrochée à un ressort de raideur k et de longueur au repos ℓ_0 .
Tous les frottements sont négligés.



- ① Faire le bilan des forces s'appliquant sur la masse m .
- ② Déterminer l'énergie potentielle E_p dérivant de l'action mécanique du ressort sur la masse en fonction notamment de x .
- ③ Tracer le graphique de E_p en fonction de x .
- ④ En déduire les positions d'équilibre du système. Indiquer leurs stabilités.

Solution

- ① Force de rappel du ressort : $\vec{F}_{\text{ressort}} = -kx - \ell_0 \vec{e}_x$. Poids : $\vec{P} = mg \vec{e}_x$.
- ② $E_p(x) = -mgx + \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$.
- ③



- ④ Voir graphique. La position est stable car il s'agit d'un minimum.