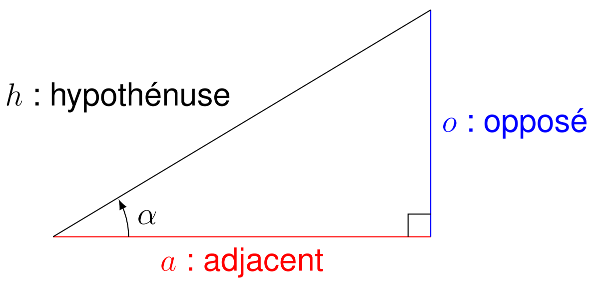
FO4 | Fiche Outils

Trigonométrie

Introduction

La trigonométrie concerne l’étude des triangles (étude de la taille des triangles) et donc en particulier des fonctions $\sin$, $\cos$ et $\tan$.

Les fonctions sinus, cosinus et tangente



Théorème de Pythagore :

$$h^2 = a^2 + o^2$$

Relations entre un angle et deux longueurs :

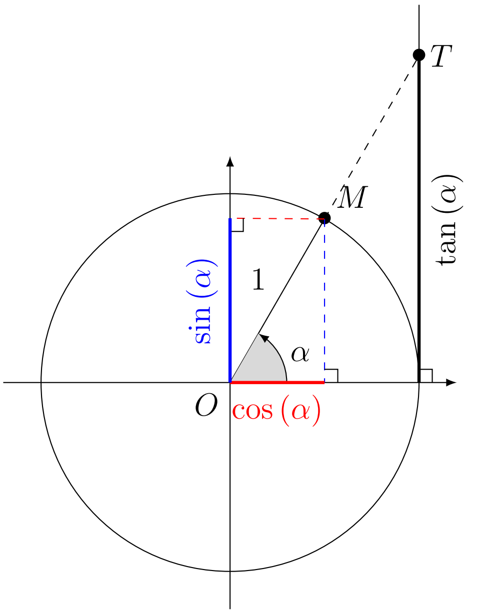
$$\sin\alpha = \frac{o}{h} \quad \cos\alpha = \frac{a}{h} \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{o}{a}$$

Exercice :

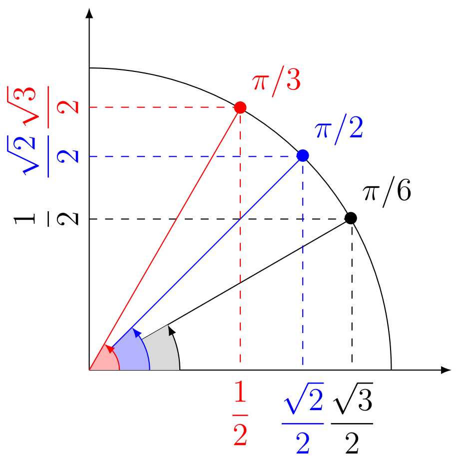
À partir des deux relations précédentes, montrer la relation $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Le cercle trigonométrique

C'est l'outil 'magique' qui permet comprendre et retenir la plupart des formules de trigonométrie.



Valeurs remarquables



α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0

Exercice :

Déterminer les valeurs remarquables de $\tan$ pour les angles suivants : 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, π et 2π.

Exercice :

Déterminer les valeurs exactes suivantes :

1. $\cos(3\pi/4)$
2. $\sin(-\pi/4)$
3. $\cos(5\pi/6)$
4. $\sin(-2\pi/6)$
5. $\cos(17\pi/2)$
6. $\sin(5\pi/3)$
7. $\tan(3\pi/4)$
8. $\sin(17\pi/3)$

Périodicités

$$\begin{aligned} &\forall p \in \mathbb{Z}, \\ \cos(\alpha + 2\pi \times p) &= \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha + 2\pi \times p) &= \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Parité

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ fonction paire

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ fonction impaire

$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ fonction impaire

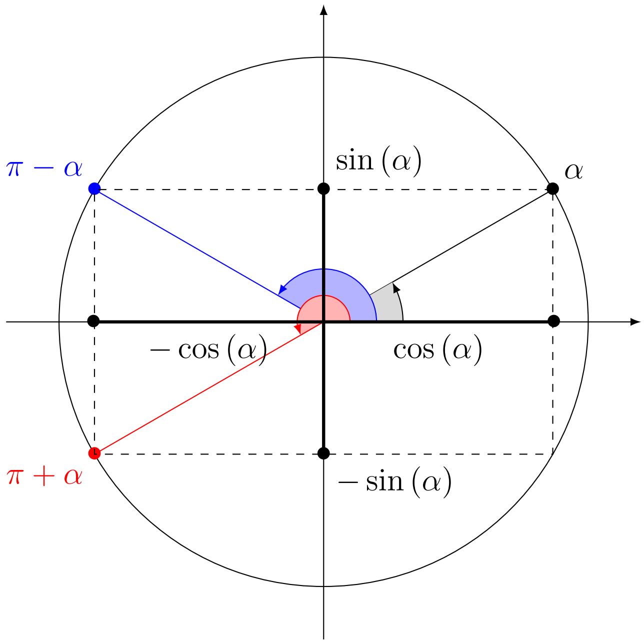
Exercice :

Retrouver les formules de périodicité et de parité pour les fonctions $\cos$, $\sin$ et $\tan$ à l'aide du cercle trigonométrique.

Rotation de π

Toutes ces transformations se retrouvent en traçant un cercle trigonométrique :

$$\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\alpha+\pi) = -\sin(\alpha) \qquad \tan(\alpha+\pi) = \tan(\alpha)$$
$$\cos(\alpha-\pi) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\alpha-\pi) = -\sin(\alpha) \qquad \tan(\alpha-\pi) = \tan(\alpha)$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha) \qquad \sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha) \qquad \tan(\pi-\alpha) = -\tan(\alpha)$$



Rotation de $\pi/2$

Exercice :

En vous aidant du cercle trigonométrique, retrouver les formules suivantes :

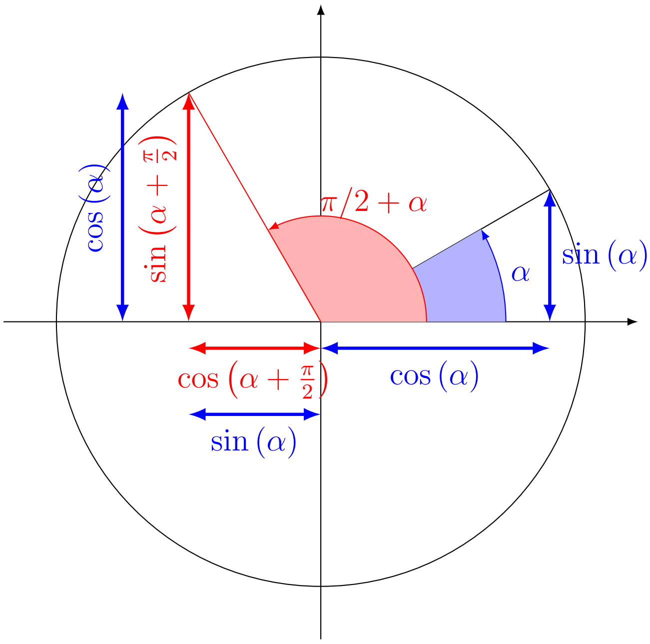
$$\cos(\alpha+\pi/2) = \qquad \sin(\alpha+\pi/2) =$$
$$\cos(\alpha-\pi/2) = \qquad \sin(\alpha-\pi/2) =$$
$$\cos(\pi/2-\alpha) = \qquad \sin(\pi/2-\alpha) =$$

Méthode :

⇝ tracer l'angle α et l'angle transformé sur le cercle trigonométrique ;

- tracer les projections sur les axes des deux angles ;
- déterminer le signe de la projection recherchée ;
- déterminer la longueur.

Exemple pour $\alpha \rightarrow \alpha + \pi/2$:



1. voir la figure de gauche ;
2. voir la figure de gauche ;
3. la projection sur l'axe des abscisses est négative, donc $\cos(\pi/2+\alpha) = \ominus ...$ et la projection sur l'axe des ordonnées est positive, donc $\sin(\pi/2+\alpha) = \oplus ...$;
4. la longueur vaut sur l'axe des abscisses est $\sin(\alpha)$, donc $\cos(\pi/2+\alpha) = -\sin(\alpha)$ et la longueur sur l'axe des ordonnées est $\cos\alpha$ donc $\sin(\pi/2+\alpha) = \cos(\alpha)$.

Pour la tangente, il faut repasser par la définition $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ pour montrer que :

$$\tan(\pi/2+\alpha) = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$$
$$\tan(\pi/2-\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

Additions et soustractions d'angle

Ces formules sont à connaitre par cœur car elles sont à la base de toutes les autres formules.

Formules d'addition et soustraction d'angles :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Les formules pour la tangente se démontrent[1] à partir des sinus et cosinus.

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

1. voir les annexes

Remarque : toutes les formules d'addition et soustraction permettent de retrouver les valeurs remarquables de rotation pour π ou $\pi/2$.

Exemple :

$$\cos(14\pi/3) = \cos\left(\frac{12\pi+2\pi}{3}\right)$$
$$\cos(14\pi/3) = \cos\left(4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\cos(14\pi/3) = \cos(4\pi)\cos(2\pi/3) - \sin(4\pi)\sin(2\pi/3)$$
$$\cos(14\pi/3) = 1\times -\frac{1}{2} - 0\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos(14\pi/3) = -\frac{1}{2}$$

Formules de duplication

Ces formules sont à connaitre par cœur ou à savoir retrouver rapidement.

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)\\ &= 2\cos^2(\alpha)-1\\ &= 1-2\sin^2(\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\\ &= \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}\end{aligned}$$ [2]

Exercice :

Démontrer les 3 formules pour le cosinus et la formule pour le sinus à l'aide des formules d'addition et soustraction d'angle.

2. Formule rarement utile. Voir la démonstration en annexe $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)}$

Ces formules sont souvent utiles pour linéariser un $\sin^2$ ou un $\cos^2$:

$$\cos^2(\alpha) = \frac{\cos(2\alpha)+1}{2}$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$
$$\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$$

Formules de linéarisation

Ces formules sont à connaitre par cœur ou à savoir retrouver rapidement. Les formules de linéarisation permettent de transformer un produit de fonction trigonométrique en somme de fonction trigonométrique.

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$
$$2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

Exercice :

Démontrer les 2 formules précédentes à l'aide des formules d'addition et soustraction d'angle.

Formules de factorisation

Ces formules sont à connaitre par cœur ou à savoir retrouver rapidement. Les formules de factorisation permettent de transformer une somme de fonction trigonométrique en produit de fonction trigonométrique (contrairement à la linéarisation).

$$\begin{aligned}
\cos(p) + \cos(q) &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\
\cos(p) - \cos(q) &= 2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{q-p}{2} \\
&= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(p) + \sin(q) &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\
\sin(p) - \sin(q) &= 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}
\end{aligned}$$

Exercice :

Démontrer la première formule pour le cosinus et la première formule pour le sinus.

Annexes

Démonstration $\tan\left(\pi/2 \pm \alpha\right) = \mp\dfrac{1}{\tan\left(\alpha\right)}$

$$\begin{aligned}
\tan\left(\pi/2 \pm \alpha\right) &= \frac{\sin\left(\pi/2 \pm \alpha\right)}{\cos\left(\pi/2 \pm \alpha\right)}\\
&= \frac{\cos\left(\alpha\right)}{\mp\sin\left(\alpha\right)}\\
&= \mp\frac{1}{\tan\alpha}
\end{aligned}$$

Démonstration $\tan\left(a \pm b\right) = \dfrac{\tan\left(a\right) \pm \tan\left(b\right)}{1 \mp \tan\left(a\right)\tan\left(b\right)}$

$$\begin{aligned}
\tan\left(a \pm b\right) &= \frac{\sin\left(a \pm b\right)}{\cos\left(a \pm b\right)}\\
&= \frac{\sin\left(a\right)\cos\left(b\right) \pm \sin\left(b\right)\cos\left(a\right)}{\cos\left(a\right)\cos\left(b\right) \mp \sin\left(a\right)\sin\left(b\right)}\\
&= \frac{\dfrac{\sin\left(a\right)\cos\left(b\right)}{\cos\left(a\right)\cos\left(b\right)} \pm \dfrac{\sin\left(b\right)\cos\left(a\right)}{\cos\left(a\right)\cos\left(b\right)}}{1 \mp \dfrac{\sin\left(a\right)\sin\left(b\right)}{\cos\left(a\right)\cos\left(b\right)}}\\
&= \frac{\tan\left(a\right) \pm \tan\left(b\right)}{1 \mp \tan\left(a\right)\tan\left(b\right)}
\end{aligned}$$

Démonstration $\cos^2\left(\alpha\right) = \dfrac{1}{1 + \tan^2\left(\alpha\right)}$

$$\begin{aligned}
\cos^2\left(\alpha\right) &= 1 - \sin^2\left(\alpha\right)\\
&= 1 - \tan^2\left(\alpha\right)\cos^2\left(\alpha\right)\\
\cos^2\left(\alpha\right)\left(1 + \tan^2\left(\alpha\right)\right) &= 1\\
\cos^2\left(\alpha\right) &= \frac{1}{1 + \tan^2\left(\alpha\right)}
\end{aligned}$$