

TD du chapitre 1 : Pratiques calculatoires et raisonnement.

Exercice 1

Déterminer les parties de $\mathbb{R}$ sur lesquelles les propositions suivantes sont vraies (vous pourrez commencer par représenter ces ensembles sur la droite réelle) :

- a) $(x > 0 \text{ et } x < 1) \text{ ou } x = 0$ b) $x > 3 \text{ et } x < 5 \text{ et } x \neq 4$ c) $(x < 0 \text{ et } x > 1) \text{ ou } x = 4$

Exercice 2

1. Dessiner une fonction f qui telle que $f(3) = f(5) = 0$
2. Dessiner une fonction f telle qu'il existe une valeur de x vérifiant $f(x) = 3$.
3. Dessiner une fonction f qui vaut 3 pour toutes valeurs de x réels.
4. Dessiner une fonction f telle que il existe une valeur de x pour laquelle $f(x) = 4$ et une tel que $f(x) = 1$.

Exercice 3

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- a. $\forall x < 2, x^2 \leq 4$ b. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ c. $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ est entier pair.

Exercice 4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I . Exprimer les négations des assertions suivantes : (on essaiera d'exprimer par une phrase ce que signifie l'assertion initiale)

- | | |
|---|--|
| 1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$. | 4. $\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ |
| 2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$ | 5. $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ |
| 3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$. | 6. $\forall x \in I, f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$ |

Exercice 5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur I . Exprimer à l'aide de quantificateurs :

- | | |
|--|--|
| 1. la fonction f s'annule. | 4. f ne prend jamais deux fois la même valeur. |
| 2. f est la fonction nulle | 5. La fonction f présente un minimum. |
| 3. f n'est pas une fonction constante. | 6. f ne s'annule qu'une seule fois. |

Exercice 6

Montrer que, pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$. Montrer aussi que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{x^2}{2} + x + 1 \leq e^x$

Exercice 7

Simplifier les expressions suivantes où a, b, c sont trois réels non nuls : $A = \frac{2^{-3} \times 4^5 \times 6^{-7}}{3^2}$ $B = \frac{(a^5)^2(b^{-3})^{-1}c^4}{a^3b^{-2}(c^2)^{-3}}$

Exercice 8

Soit x et y deux réels tels que $1 \leq x < 2$ et $-5 < y \leq -2$. Encadrer $x+y$, $x-y$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ et $(2x+y)^2$.

Exercice 9

Encadrer l'expression proposé sur l'intervalle I :

a) $f(x) = \frac{-3}{3\ln(x^2 + 1) + 1} - 7$ sur $I = [0, 1]$

b) $g(x) = -2e^{x^2+1} + 5$ sur $I = [-1, 0]$

Exercice 10

Déterminer, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les solutions réelles de l'équation : $m^2x^2 + 2mx - 3 = 0$

Exercice 11

Résoudre les équations suivantes :

a) $3x^3 = 16x^2 - 25x + 12$

b) $x^2 + x + 1 = 0$

c) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sqrt{3x^2 - 4} = \sqrt{1 - 2x}$

b) $|x - 3| < 1$

c) $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $-3x^2 + 8x - 5 \leq 0$

b) $x^3 - 19x + 30 > 0$

c) $x + \frac{3}{x} \leq 6$

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants :

a. $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} x + y = z \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \end{cases}$

Exercice 16

Déterminer, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions réelles de l'équation : $x^2 - 2m + 6 - m = 0$

Exercice 17

Soit a et b deux réels positifs tels que $b \leq a \leq 2b$. On pose : $A = \sqrt{a + 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-b}\sqrt{b}}$.
Montrer que A et B existe puis simplifier son expression. (*Indication : On pourra calculer A^2*)

Exercice 18

Déterminer un encadrement des fonctions dont on vous donne l'expression sur l'intervalle I proposé :

a) $f(x) = \frac{5}{3x^2 + 2} + 2$ sur $I = [1, 3]$

b) $g(x) = \frac{-3}{\sqrt{3x^2 + 2}} + 4$ sur $I = [-3, -1]$