

Fractions

Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.



Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel).

a) $\frac{32}{40}$

c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$

b) $8^3 \times \frac{1}{4^2}$

d) $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$

c) $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$

b) $\frac{2}{3} - 0,2$

d) $-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5})$

Calcul 1.3



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7})$

b) $(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}) \times \frac{21}{24}$

c) $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$

d) $\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$

Calcul 1.4 — Un petit calcul.



Écrire $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$ sous forme d'une fraction irréductible.

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\frac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)}$...

c) $\frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235}$

b) $\frac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2}$

d) $\frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001}$...

Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

- a) $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- b) $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux.
- c) $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.

Simplifier $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$

Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \frac{b}{X}$ avec a et b entiers et $X \in \mathbb{R}$.

- a) $\frac{29}{6}$ b) $\frac{k}{k-1}$... c) $\frac{3x-1}{x-2}$..

Calcul 1.9 — Un produit de fractions.Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On donne $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$ et $B = (1+t^2)(1+t)^2$.Simplifier AB autant que possible.

Comparaison

Calcul 1.10 — Règles de comparaison.

Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

- a) $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9}$ b) $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12}$ c) $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21}$

Calcul 1.11 — Produit en croix.Les nombres $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? Oui ou non ? **Calcul 1.12** — Produit en croix.On pose $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$? **Réponses mélangées**

$\frac{-1}{n(n+1)^2}$	$-\frac{ab}{a-b}$	2	3	$\frac{12}{11} > \frac{10}{12}$	$\frac{1}{2}$	247	$\frac{n^3+n}{n+1}$	1 000	$\frac{1}{9}$
$2t$	$\frac{-10}{3}$	$\frac{4}{5}$	$3 + \frac{5}{x-2}$	$\frac{3}{2}n$	$\frac{203}{24}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{5} > \frac{5}{9}$	9
$4 + \frac{5}{6}$	$A > B$	1	$\frac{16}{35}$	2^5	$-2 \times 3^{3k-2}$	Non	$1 + \frac{1}{k-1}$	$\frac{125}{25} = \frac{105}{21}$	

► **Réponses et corrigés page 85**

Puissances

Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ c) $\frac{10^5}{10^3}$ e) $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$

b) $(10^5)^3$ d) $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$ f) $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$

Calcul 2.2



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ c) $\frac{2^5}{2^{-2}}$ e) $\frac{6^5}{2^5}$

b) $(5^3)^{-2}$ d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ f) $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$

Calcul 2.3



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ c) $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$

b) $2^{21} + 2^{22}$ d) $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}}$

Calcul 2.4



Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ c) $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$

b) $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ d) $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$

Calcul 2.5



Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x .

a) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$

b) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$ d) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$

Réponses mélangées

$\frac{x}{x+1}$	15^4	$\frac{2x}{x+1}$	$2^{21} \cdot 3$	10^{15}	11	5^{-6}	$2^{38} \cdot 3^{26}$
10^2	10^8	10^{-2}	$2^{-4} \cdot 3^{-1}$	$2^6 \cdot 5$	3^5	$(-7)^{-2}$	
$\frac{2}{x-2}$	10^4	8	2^7	10^{-8}	3^{10}	$\frac{1}{x-2}$	3^{28} 2

► Réponses et corrigés page 88

Prérequis

Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x .

- | | | | |
|--|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$ | <input type="text"/> | d) $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> |
| b) $(x-1)^3(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> | e) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> |
| c) $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$ | <input type="text"/> | f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ | <input type="text"/> |

Calcul 3.2



Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x .

- | | |
|--|----------------------|
| a) $(x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2)$ | <input type="text"/> |
| b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$ | <input type="text"/> |
| c) $\left((x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)+1\right)x - x^6 - x^5 + 2$ | <input type="text"/> |
| d) $(x+1)(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> |
| e) $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(1 - \sqrt{2}x + x^2)$ | <input type="text"/> |
| f) $(x^2 + x + 1)^2$ | <input type="text"/> |

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.



Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

- | | |
|---------------------------------------|----------------------|
| a) $-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49$ | <input type="text"/> |
| b) $25 - (10x+3)^2$ | <input type="text"/> |
| c) $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64$ | <input type="text"/> |
| d) $(-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64$ | <input type="text"/> |

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.

Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ (où $a \neq 0$).

- | | | | |
|-------------------------|----------------------|---------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 2x + 1$ | <input type="text"/> | d) $3x^2 + 7x + 1$ | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 4x + 4$ | <input type="text"/> | e) $2x^2 + 3x - 28$ | <input type="text"/> |
| c) $x^2 + 3x + 2$ | <input type="text"/> | f) $-5x^2 + 6x - 1$ | <input type="text"/> |

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- | | | | |
|--------------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $(x + y)^2 - z^2$ | <input type="text"/> | d) $xy - x - y + 1$ | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ | <input type="text"/> | e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$.. | <input type="text"/> |
| c) $xy + x + y + 1$ | <input type="text"/> | f) $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$.. | <input type="text"/> |

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- | | |
|---|----------------------|
| a) $x^4 - 1$ | <input type="text"/> |
| b) $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64$ | <input type="text"/> |
| c) $x^4 + x^2 + 1$ | <input type="text"/> |
| d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ | <input type="text"/> |
| e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$.. | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 & (a^2 + b^2)(y - 4x^2)(y + 4x^2) & (x + 1)(x + 2) & & & & \\
 2 + x^3 - x^4 - x^5 & x^5 - x^3 - x^2 + 1 & (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) & & & & \\
 2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right) & 2(3x - 4)(10x + 3) & 1 + x^4 & (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) & & & \\
 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) & (x + y - z)(x + y + z) & 4(5x + 4)(-5x + 1) & & & & \\
 -1 - 3x - 3x^2 + x^3 & x^4 + x^2 + 1 & 3(14x + 3y)(-4x + y) & (x + 1)(y + 1) & & & \\
 x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 & (x - 1)^2 & (x + y)(x + 1)^2 & -6(6x + 7) & & & \\
 8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8} & -5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right) & (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) & (x - 1)(y - 1) & (x + 2)^2 & & \\
 -2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4 & x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1 & x^5 - x^3 + x^2 - 1 & -28 + 21x & & & \\
 -8(x^2 + 1)(x - 4)(x + 4) & 3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right) & -8(x + 1)(x + 16) & & & &
 \end{array}$$

► **Réponses et corrigés page 89**

Racines carrées

Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.



Simplifier les expressions suivantes en simplifiant les symboles $\sqrt{\cdot}$ qui peuvent l'être (et en prenant à ne pas se tromper sur les signes).

a) $\sqrt{(-5)^2}$

d) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$

b) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$

e) $\sqrt{(3 - \pi)^2}$

c) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$

f) $\sqrt{(3 - a)^2}$

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.



Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$

e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$

b) $(2 + \sqrt{5})^2$

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$

c) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

g) $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$

d) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3



Écrire les expressions suivantes sans racines carrées au dénominateur.

a) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$

f) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

c) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

g) $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

h) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$

Calcul 4.4

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \dots\dots\dots \boxed{}$$

Calculs variés**Calcul 4.5** — Avec une variable.

On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x) + \frac{1}{f(x)}$	$\boxed{}$	d) $\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\boxed{}$
b) $\frac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$	$\boxed{}$	e) $f(x) + 4f''(x)$	$\boxed{}$
c) $\sqrt{x+2f(x)}$	$\boxed{}$	f) $\frac{f(x)}{f''(x)}$	$\boxed{}$

Calcul 4.6 — Mettre au carré.

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$	$\boxed{}$	b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$	$\boxed{}$
--	----------------------------	--	----------------------------

Calcul 4.7 — Méli-mélo.

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$	$\boxed{}$	d) $3e^{-\frac{1}{2}\ln 3}$	$\boxed{}$
b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$	$\boxed{}$	e) $2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	$\boxed{}$
c) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$	$\boxed{}$	f) $\frac{1}{2}\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$	$\boxed{}$

Calcul 4.8

On note $A = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$. Simplifier A

On commencera par exprimer A^3 en fonction de A

Réponses mélangées

$12\sqrt{7}$	$-4(x-1)^2$	$-(\sqrt{2} + \sqrt{3})$	$9 - \frac{10}{3}\sqrt{2}$	20	$-\frac{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$
$\sqrt{2}$	$1 + \sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	$\frac{x}{\sqrt{x-1}}$	$ 3-a $	$50 - 25\sqrt{3}$
$\sqrt{3}-1$	$3 + \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$	5	$\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$
$\frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2$	1	$2\sqrt{2}$	$9 + 4\sqrt{5}$
$\ln(1 + \sqrt{2})$	$1 + \sqrt{3}$	$-\sqrt{3} + 2$	$\pi - 3$	12	$\sqrt{7} - 2$
$1 + \sqrt{2}$	$-11 + 5\sqrt{5}$	$x - \sqrt{x^2 - 1}$	10	$\frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}$	$1 - \sqrt{10} + \sqrt{15}$

► **Réponses et corrigés page 91**

Expressions algébriques

Prérequis

Identités remarquables.

Équations polynomiales

Calcul 5.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a+2)^3$

c) a^{12}

b) $a^5 - a^6$

d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$

Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit i un nombre tel que $i^2 = -1$.Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + iy$ où x, y sont deux réels.

a) $(3+i)^2$

c) $(3-i)^3$

b) $(3-i)^2$

d) $(3-2i)^3$

Calcul 5.3



Même exercice.

a) $(4-5i)(6+3i)$

c) $(-4+i\sqrt{5})^3$

b) $(2+3i)^3(2-3i)^3$

d) $(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$

Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit a un nombre distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$

b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$

c) $\prod_{k=0}^{1234} a^k$

d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$

e) $\sum_{k=1}^{99} a^k$

f) $\prod_{k=0}^4 (2 - a^k)$

Expressions symétriques

Calcul 5.5 — Inverse.



Soit x un réel non nul. On pose $a = x - \frac{1}{x}$. Exprimer les quantités suivantes en fonction de a uniquement.

a) $x^2 + \frac{1}{x^2} \dots$

b) $x^3 - \frac{1}{x^3} \dots$

c) $x^4 + \frac{1}{x^4} \dots$

Calcul 5.6 — Trois variables.



Soient x, y, z trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx \quad \text{et} \quad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de a, b, c uniquement.

a) $x^2 + y^2 + z^2 \dots$

b) $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) \dots$

c) $x^3 + y^3 + z^3 \dots$

d) $(x + y)(y + z)(z + x) \dots$

e) $x^2yz + y^2zx + z^2xy \dots$

f) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \dots$

Calcul 5.7



Même exercice.

a) $x^3(y + z) + y^3(z + x) + z^3(x + y) \dots$

b) $x^4 + y^4 + z^4 \dots$

c) $\frac{x}{(x - y)(x - z)} + \frac{y}{(y - z)(y - x)} + \frac{z}{(z - x)(z - y)} \dots$

d) $\frac{x^2}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^2}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^2}{(z - x)(z - y)} \dots$

e) $\frac{x^3}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^3}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^3}{(z - x)(z - y)} \dots$

Réponses mélangées

$-4 + 43i\sqrt{5}$	$a^4 + 4a^2 + 2$	$ab - c$	-1	$-9 - 46i$	$a^3 + 3a$	$7a^2 + 12a + 7$
$39 - 18i$	$18 - 26i$	$8 - 6i$	$a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$	$a^2 + 2$	3	1
$8 + 6i$	ac	1	0	31	a	$a^2 - 1$
$-a^2 + 1$	$-2ac + b^2$	$ab - 3c$	0	$a^2 - 2b$	$4a^2 - a - 3$	1
						$a^2b - ac - 2b^2$
						$a^3 - 3ab + 3c$

► Réponses et corrigés page 93

Équations du second degré

Prérequis

Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.



Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi 0, 1, -1, 2, -2 ainsi éventuellement que 3 et -3.*

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

f) $2x^2 + 3x = 0$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

g) $2x^2 + 3 = 0$

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$

i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$

e) $x^2 - 5x = 0$

j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$

Calcul 6.2 — Somme et produit.



Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$

e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.



Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine

c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine

d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine

Calcul 6.4 — Racine évidente.

Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

- a) $(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$
- b) $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$
- c) $(x+a)(x+b) = (m+a)(m+b)$
- d) $(b-c)x^2 + (c-a)mx + (a-b)m^2 = 0$
- e) $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} = \frac{m}{a} + \frac{b}{m}$
- f) $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Recherche d'équations

Calcul 6.5 — À la recherche de l'équation.

En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

- a) 9 et 13
- b) -11 et 17
- c) $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$
- d) $m + \sqrt{m^2 - 3}$ et $m - \sqrt{m^2 - 3}$
- e) $m + 3$ et $\frac{2m-5}{2}$
- f) $\frac{m+1}{m}$ et $\frac{m-2}{m}$

Calcul 6.6 — Avec le discriminant.

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

- a) $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$
- b) $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$
- c) $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3) = 0$

Factorisations et signe

Calcul 6.7 — Factorisation à vue.



Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x .

- a) $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$
- b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x - 1)(ax + b)$
- c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(ax + b)$
- d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x - 5)(ax + b)$
- e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x - \sqrt{7})(ax + b)$

Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.



Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

- a) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$
- b) $-x^2 + 2x + 15$
- c) $(x + 1)(3x - 2)$
- d) $\frac{x - 4}{2x + 1}$

Réponses mélangées

$2/3$ m donc ab/m m donc $-(m + a + b)$ $a = -3$ et $b = 5$ $-7, -11$
 $x^2 - 22x + 117 = 0$ $] -\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[$ 0 , donc 5 $m = 1$ et $x = -1$ ou $m = -1$ et $x = 1$
 $[-3, 5]$ m donc $m(a - b)/(b - c)$ $a = 1/2$ et $b = 8$ $-3, 11$ 1 donc $c(a - b)/(a(b - c))$
 a, b $] -\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$ $-1/m$ $a + b$ puis $2ab/(a + b)$. 1 donc -5
 $6, 7$ 1 donc $(a - b)/(b - c)$ $] -\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[$ $2m/(m + 3)$
 $-2/7$ $a = 1$ et $b = 3\sqrt{7}$ $m^2x^2 + (m - 2m^2)x + (m^2 - m - 2) = 0$
 $a = -2$ et $b = 1$ $2, 3$ $a - b, a + b$ $3, 3$ $a = 2$ et $b = 3$ 1 donc $8/3$
 $\emptyset$ $m = -3/4$ et $x = 3/4$ $-3, -5$ $2x^2 - (4m + 1)x + (2m^2 + m - 15) = 0$
 -1 donc $-19/5$ $x^2 - 4x + 1 = 0$ $-1/3, -1/3$ $x^2 - 2mx + 3 = 0$
 0 , donc $-3/2$ $x^2 - 6x - 187 = 0$ $2, -6$ $m = -1$ et $x = -2$, ou $m = 7$ et $x = 2/3$

► Réponses et corrigés page 96

Exponentielles

Calcul 7.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $e^{3 \ln 2}$

d) $e^{-2 \ln 3}$

b) $\ln(\sqrt{e})$

e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$

c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$

f) $e^{\ln 3 - \ln 2}$

Calcul 7.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$

d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$

b) $e^{-\ln \ln 2}$

e) $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$

c) $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$

f) $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$

Études de fonctions

Calcul 7.7 — Parité.



Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \mapsto \ln \frac{2021 + x}{2021 - x}$

b) $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

c) $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

d) $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.



Soit $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction.

b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a + b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$

Calcul 7.9



On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

- | | | | |
|------------------------------------|----------------------|-------------------------------------|----------------------|
| a) $f(2e^x - 1)$ | <input type="text"/> | d) $xf'(x) - 1$ | <input type="text"/> |
| b) $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ | <input type="text"/> | e) $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ | <input type="text"/> |
| c) $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$ | <input type="text"/> | | |

Équations, inéquations

Calcul 7.10



Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

- | | |
|---|----------------------|
| a) $e^{3x-5} \geq 12$ | <input type="text"/> |
| b) $1 \leq e^{-x^2+x}$ | <input type="text"/> |
| c) $e^{1+\ln x} \geq 2$ | <input type="text"/> |
| d) $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$ | <input type="text"/> |
| e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ | <input type="text"/> |
| f) $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$ | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{1}{2} \ln 2$	-1	$-3 \ln 2$	8	$2 \ln 5 - 2 \ln 2$	$x \geq \frac{\ln 12 + 5}{3}$
$3 \ln 5 + 2 \ln 2$	$2 \ln 3 - 2 \ln 2$	impaire	$x \geq \frac{2}{e}$	$-2 \ln 5 + 4 \ln 2$	$\mathbb{R}$	$\frac{3}{2}$
$\ln 3 + 11 \ln 2$	1	$x + \ln 2$	$\frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$	impaire	-1	0
$9 \ln 2$	$\frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{1+x}$	$3 \ln 2$	-17	$(1+x)^x$
$\frac{1}{9}$	-2	$-\ln 3 - 2 \ln 2$	$4 \ln 2$	$x \in [0, 1]$	impaire	impaire
$\ln x-1 $	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\ln 2}$	0	ok	$17 + 12\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$
						$-2 \ln 2 - 2 \ln 5$
						1

► Réponses et corrigés page 98

Dérivation

Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 9.1 — Avec des produits.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6) \exp(2x)$

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x) \ln(x - 2)$

Calcul 9.2 — Avec des puissances.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x))^2$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3 \cos(x) - \sin(x))^3$

Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x) \exp(x^2 + x)$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3 \sin(2x))$

Calcul 9.4 — Avec des fonctions composées — *bis.*Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$

c) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

d) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

Calcul 9.5 — Avec des quotients.Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2 \sin(x) + 3}$

b) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x + 2}$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{\cos(2x + 1)}{x^2 + 1}$

d) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\ln(x)}$

Opérations et fonctions composées

Calcul 9.6Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $x \in]-3, 3[$ et $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

d) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 9.7



Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus 3, -2$ et $f(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{2+x}$

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \frac{x+2}{x-1}$

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{2x^2 + 2x + 5}{(x+2)(x-1)^2} & \frac{1}{x \ln(x)} & \frac{2}{x(1 - \ln(x))^2} & \frac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} & \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}} & & \\
 (6x-1)\ln(x-2) + \frac{3x^2-x}{x-2} & \frac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} & \frac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2} \sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right) & & & & \\
 \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin(x)} & -3(3 \cos(x) - \sin(x))^2(3 \sin(x) + \cos(x)) & & 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15 & & & \\
 6 \cos(2x) \exp(3 \sin(2x)) & \frac{(2x+3)(2 \sin(x) + 3) - (x^2+3x) \times 2 \cos(x)}{(2 \sin(x) + 3)^2} & & 5(x^2 - 5x)^4(2x - 5) & & & \\
 -2 \frac{(x^2+1) \sin(2x+1) + x \cos(2x+1)}{(x^2+1)^2} & \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & \frac{6x}{(x^2+1)^2} \cos\left(\frac{2x^2-1}{x^2+1}\right) & \frac{x^2}{(x+1)^2} & & & \\
 \frac{(4x+3) \ln(x) - 2x-3}{(\ln(x))^2} & \frac{2}{x+1} \left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) & & \frac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2} & & & \\
 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & 6x^2 + 2x - 11 & (2x^2 - 2x + 10) \exp(2x) & 8 \cos^2(x) - 6 \cos(x) \sin(x) - 4 & & & \\
 4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2) & \frac{2x}{x^2+1} & (-2x^2 + 3x + 1) \exp(x^2 + x) & \frac{1}{1-x^2} & & &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 103

Systèmes linéaires

Prérequis

Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.

Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Calcul 15.1



Résoudre dans $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6x + 2y = 3\sqrt{2} \end{cases}$

Calcul 15.2 — Systèmes avec paramètre.



Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$

Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

Calcul 15.3



Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$

Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

Calcul 15.4



Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$

Calcul 15.5

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a proposées.

- | | | | |
|-------------------|----------------------|---|----------------------|
| a) $a = 0$ | <input type="text"/> | c) $a = 3$ | <input type="text"/> |
| b) $a = -2$ | <input type="text"/> | d) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$ | <input type="text"/> |

Calcul 15.6

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètres $(a, c) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x - az = c \\ ax - y = c \\ ay - z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a et c proposées.

- | | | | |
|-------------------------|----------------------|---|----------------------|
| a) $a = 2, c = 7$ | <input type="text"/> | c) $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ | <input type="text"/> |
| b) $a = 1, c = 2$ | <input type="text"/> | | |

Calcul 15.7

On propose le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de λ proposées.

- | | | | |
|------------------------|----------------------|------------------------|----------------------|
| a) $\lambda = 1$ | <input type="text"/> | c) $\lambda = 6$ | <input type="text"/> |
| b) $\lambda = 3$ | <input type="text"/> | | |

Réponses mélangées

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(1 - \frac{a}{4}, \frac{-1}{2} + \frac{3}{8}a \right) \right\} \quad \{(2, -1, 3)\} \quad \emptyset \quad \{(-1, 4, 2)\} \quad \{(7, 2)\} \\ & \{(x, y, -x - y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \quad \{(1, 1/2, 1/2)\} \quad \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} \\ & \left\{ \left(-\frac{2}{7} - z, \frac{3}{7}, z \right); z \in \mathbb{R} \right\} \quad \{(5, 3, -1)\} \quad (2, -3) \quad (a - 2a^2, a + a^2) \\ & \left\{ \left(\frac{13}{6} - \frac{5}{3}z, -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}z, z \right); z \in \mathbb{R} \right\} \quad \emptyset \quad \left\{ \left(\frac{a^2 + a - 1}{a^3 - 1}c, \frac{a^2 - a + 1}{a^3 - 1}c, \frac{-a^2 + a + 1}{a^3 - 1}c \right) \right\} \\ & \left\{ \left(\frac{1}{13}a + \frac{5}{13}a^2, \frac{2}{13}a - \frac{3}{13}a^2 \right) \right\} \quad \left\{ \left(x, \frac{-5}{12} - \frac{3}{2}x, \frac{-25}{24} - \frac{7}{4}x \right); x \in \mathbb{R} \right\} \\ & \{(1 + z, -z, z); z \in \mathbb{R}\} \quad \{(x, x, x); x \in \mathbb{R}\} \quad \left\{ \left(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2} \right) \right\} \quad \{(0, 0, 0)\} \\ & \{(1, y, 3 + 2y); y \in \mathbb{R}\} \quad \emptyset \quad \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\} \quad \{(5z, 1 - 4z, z); z \in \mathbb{R}\} \quad \{(3, 1)\} \end{aligned}$$

Prérequis

Forme algébrique et forme exponentielle.

Pour s'échauffer

Calcul 16.1 — Écriture algébrique.



Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

- | | | | |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------|
| a) $(2 + 6i)(5 + i)$ | <input type="text"/> | e) $(2 - 3i)^4$ | <input type="text"/> |
| b) $(3 - i)(4 + i)$ | <input type="text"/> | f) $\frac{1}{3 - i}$ | <input type="text"/> |
| c) $(4 - 3i)^2$ | <input type="text"/> | g) $\frac{2 - 3i}{5 + 2i}$ | <input type="text"/> |
| d) $(1 - 2i)(1 + 2i)$ | <input type="text"/> | h) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ | <input type="text"/> |

Calcul 16.2 — Forme exponentielle.



Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

- | | | | |
|----------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) 12 | <input type="text"/> | e) $-2e^{i\frac{3\pi}{5}}$ | <input type="text"/> |
| b) -8 | <input type="text"/> | f) $5 - 5i$ | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{3}i$ | <input type="text"/> | g) $-5 + 5i\sqrt{3}$ | <input type="text"/> |
| d) $-2i$ | <input type="text"/> | h) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ | <input type="text"/> |

Un calcul plus dur

Calcul 16.3 — Une simplification.



On pose $z = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i}$.

- | | |
|---|----------------------|
| a) Calculer $ z $ | <input type="text"/> |
| b) Mettre z sous forme algébrique | <input type="text"/> |
| c) Calculer z^{2021} | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

$\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$	5	1	$4 + 32i$
$\frac{4}{29} - \frac{19}{29}i$	$10e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$13 - i$	$5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$	$2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$	12
$7 - 24i$	$8e^{i\pi}$	$2e^{i\frac{8\pi}{5}}$	$\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$	$-119 + 120i$	$\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$
					$2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

► Réponses et corrigés page 131

Suites numériques

Prérequis

Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

Calcul de termes

Calcul 21.1 — Suite explicite.Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer :a) u_0 c) u_{n+1} b) u_1 d) u_{3n} **Calcul 21.2** — Suite récurrente.On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

a) son troisième terme

b) u_3 **Calcul 21.3** — Suite récurrente.On définit la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ par $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \geq 1, v_{n+1} = \sqrt{v_n}$. Calculer :a) v_3

b) son sixième terme

Calcul 21.4 — Suite récurrente.On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n^2$. Calculer :a) w_2

b) son centième terme

Calcul 21.5 — Suite explicite.Soit la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \ln\left(\frac{n^n}{2^n}\right)$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$:a) t_{2n} b) t_{4n}

Suites arithmétiques et géométriques

Calcul 21.6 — Suite arithmétique.La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :a) a_{10} c) $a_{1\,000}$ b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \dots + a_{99}$ d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \dots + a_{100}$

Calcul 21.7 — Suite arithmétique.

La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r vérifiant que $b_{101} = \frac{2}{3}$ et $b_{103} = \frac{3}{4}$. Calculer :

a) b_{102}
b) r
Calcul 21.8 — Suite géométrique.

La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $\frac{1}{2}$. Calculer :

a) Son dixième terme est :

c) g_{10}
b) $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \dots + g_9$
d) $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \dots + g_{10}$
Calcul 21.9 — Suite géométrique.

La suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q > 0$ vérifiant que $h_{11} = \frac{5\pi}{11}$ et $h_{13} = \frac{11\pi}{25}$. Calculer :

a) h_{12}
b) q

Suites récurrentes sur deux rangs

Calcul 21.10

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$. Calculer :

a) u_n
b) u_5
Calcul 21.11

Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$. Calculer :

a) v_n
b) v_2
Calcul 21.12 — Suite de Fermat.

Soit la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$. Calculer :

a) F_3
d) $F_n \times (F_n - 2)$
b) F_4
e) F_n^2
c) $(F_{n-1} - 1)^2 + 1$
f) $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$

Réponses mélangées

$\frac{1}{24}$	$\frac{\pi\sqrt{5}}{5}$	$2^{\frac{1}{64}}$	$\frac{3069}{512}$	F_{n+2}	29	$F_{n+1} - 2$	$\frac{17}{24}$	$\frac{6141}{1024}$	2
$2\sqrt{2}$	$\frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2}$		21	10 000	13	$\frac{3}{1\,024}$	65 537	257	
$\frac{11\sqrt{5}}{25}$	211	$\frac{(2n+5) \cdot 2^{n+3}}{5}$	2	$F_{n+1} + 2^{2^n+1}$	$3^n + (-2)^n$	8	$4n \ln(2n)$		
10 201	$2^{\frac{1}{8}}$	$\frac{3}{512}$	$2n \ln(n)$	F_n	2 001	$\frac{12}{5}$	$\frac{3(2n+1) \cdot 2^{3n+2}}{5}$		

► **Réponses et corrigés page 149**