

Programme de colle TS 1 // semaine 1 du 16/09 au 20/09

I Étude d'équations et d'inéquations

- ☞ Propriétés de compatibilités des relations d'ordre.
- ☞ Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (avec I intervalle de $\mathbb{R}$), alors :
 - ☐ f est croissante sur I si : $\forall a, b \in I, a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
 - ☐ f est décroissante sur I si : $\forall a, b \in I, a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$
- ☞ Décomposition en fonctions de référence d'une fonction (quand c'est possible) et utilisation de cette décomposition pour déterminer un encadrement de f sur un intervalle donnée et sa variation.
- ☞ Tableaux de signes
- ☞ Étude d'inéquations par étude de fonctions.
- ☞ Valeur absolue et distance

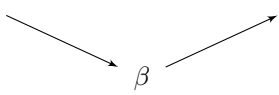
II Fonctions polynômiales : première approche.

Dans cette partie f désigne la fonction polynomiale $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.

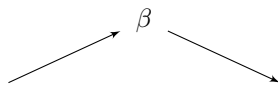
☞ alors $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ (**forme canonique**) où $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

☞ Variations :

Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f			

Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f			

☞ Étude de signe et racines :

☐ Si $\Delta > 0$ alors l'équation f possède 2 racines x_1 et x_2 telles que

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et f peut être factorisée sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. D'où le signe :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	signe de a	0	signe de -a	0	signe de a

☐ Si $\Delta = 0$ alors l'équation f possède 1 unique racine x_0 appelé racine double, est :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

et f peut se factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_0)^2$. D'où le signe :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
	signe de a	0	signe de a

☐ Si $\Delta < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines complexes **conjugués** telles que

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

et f peut être factorisée sous la forme $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

Son signe :

x	$-\infty$	$+\infty$
	signe de a	

- ☞ Si f admet deux racines x_1 et x_2 (c.a.d $\Delta \geq 0$ alors) :
$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{c}{a} \\ (x_1 + x_2) = \frac{-b}{a} \end{cases}$$
- ☞ Soit f une fonction polynômiale de degré n un entier non nul, admettant un réel a comme racine, alors il existe une fonction polynômiale g de degré $n - 1$ vérifiant :
- $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x - a)g(x)$$

III Exercices sur les quantificateurs

- ☞ Quantificateurs : $\exists, !, \forall, \in \dots$
- ☞ Négation d'une proposition.

IV Sommes et produits

- ☞ Notation et définition $\sum$ et $\prod$.
- ☞ Linéarité de $\sum$ (exercice 7 du cours)
- ☞ Changement d'indice :



Méthode 1

1. On exprime le nouvel indice en fonction de l'ancien puis inversement.
2. On détermine les nouvelles bornes et l'expression à sommer en fonction du nouvel indice.

- ☞ **Télescopage** : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles ou complexes et m et n deux entiers tel que $m \leq n$, alors :

$$\sum_{k=m}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$$



Méthode 2

La méthode par télescopage consiste à :

1. Reconnaître une expression de la forme $u_{k+1} - u_k$ et l'expression de u_k
2. Puis à appliquer la formule précédente.

- ☞ Une factorisation (où $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$$

- ☞ Conséquence, si $q \neq 1$:

$$1 + q + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

V Éléments de cours à savoir restituer

1. Etude d'une inégalité par l'étude d'une fonction : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leq x$

2. **Démonstration de l'égalité** : $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

3. Donner un polynôme du second degré simple (racines entières s'il y en a) et demander :

☐ La forme canonique.

☐ Détermination des racines et étude du signe.

☐ L'étude de variation.

☐ La somme et le produit des racines

4. Factorisation par $(x - 1)$ (par la méthode que l'étudiant choisit) de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3 + x^2 + x - 3$

5. Démonstration de :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})$$

(a) Démonstration par changement d'indice

(b) Démonstration par télescopage

6. Déterminer la formule de récurrence pour les sommes suivantes :

(a) $A_n = \sum_{k=1}^n (3k + 1)$

(b) $B_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{2k + 1}$

(c) $C_n = \sum_{k=1}^n (k^2 + 3k + n)$

7. Simplifier l'expression ci-dessous par télescopage :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$